Bab IV
Induksi Dan Rekursi

4.1. Induksi Pada Bilangan Asli (Natural)

Biasanya, induksi matematis atau disebut juga induksi lengkap (*complete induction*) paling banyak digunakan dalam domain bilangan natural. Khususnya, dalam induksi, diasumsikan bahwa suatu sifat tertentu yang menggunakan bilangan asli terkecil, dalam hal ini adalah nol, dan yang jika sifat ini benar untuk n maka benar juga untuk n+1. Jika dua kondisi ini memenuhi, maka pernyataan yang diberikan benar untuk semua bilangan asli. Sebelum memahami apa itu induksi, akan lebih baik jika kita mengetahui lebih dahulu apa itu bilangan natural.

4.1.1. Bilangan Asli

Bilangan asli, adalah bilangan 0,1,2,… Ini adalah definisi yang paling dominan dalam ilmu komputer. Normalnya, diluar ilmu komputer, 0 dianggap bukan bilangan asli. Dalam kehidupan sehari-hari kita biasa menggunakan angka 0 sampai 9 untuk menyatakan 10 bilangan asli yang pertama. Semua bilangan diatas 9 dibentuk menurut aturan penyusunan tertentu. Dalam teori bilangan, hanya ada satu simbol khusus, simbol 0. Semua bilangan yang lain dituliskan dengan mekanisme pengganti (*successor mechanism*). Pengganti (successor) bilangan n, ditulis sebagai $s(n)$, adalah bilangan yang mengikuti n dalam urutan bilangan asli. Sebagai contoh, bilangan 1 ditulis sebagai $s(0)$, bilangan 2 ditulis sebagai $s(s(0))$, bilangan 3 sebagai $s(s(s(0)))$ dan lain sebagainya. Jelas bahwa, $s(n) = n+1$, tetapi untuk kali ini kita tidak akan menggunakan simbol penjumlahan. Dengan ini, kita dapat menggukan teori ini secara umum dan mendefinisika fungsi-fungsi pengganti di luar bilangan asli. Contohnya, hari-hari dalam satu minggu punya successor, seperti juga halnya dengan elemen-elemen dalam linked list.

Ada sejumlah aksioma yang mendeskripsikan bagaimana bekerja dengan bilangan asli. Aksioma-aksioma ini diperkenalkan oleh Giuseppe Peano di tahun 1889 dan disebut dengan **aksioma Peano**. Dua aksioma pertama menyediakan definisi dari suatu bilangan natural:

1. 0 adalah bilang natural
2. Jika n bilangan natural maka $s(n)$ juga bilangan natural

Catatan bahwa $s(n)$ didefinisikan sebagai bilangan natural jika n adalah bilangan natural. Ini membuat definisi bilangan natural secara rekursif. Aksioma ketiga dan keempat dari aksioma Peano menunjukkan bahwa semua bilangan natural adalah berbeda. Ini berarti bahwa $s(n)$ harus tidak pernah bernilai 0 dan bahwa $s(n) \neq s(m)$ kecuali jika $n = m$. Aksioma tiga dan empat adalah sebagai berikut :

3. Untuk semua n, $s(n) \neq 0$
4. Jika $s(n) = s(m)$ maka $n = m$

Aksioma 4 adalah kontrapositif dari $(n \neq m) \Rightarrow (s(n) \neq s(m))$, yang mengatakan bahwa bilangan yang berbeda akan mempunyai successor yang berbeda.

Ada empat aksioma yang melibatkan penjumlahan dan perkalian. Kita mendefinisikan 0 menjadi identitas kanan dalam penjumlahan, sehingga:

$$\forall m(m+0 = m) \tag{4.1}$$

Fungsi pengganti digunakan untuk n yang selebihnya. Ini menghasilkan suatu definisi rekursif:

$$\forall m \forall n(m + s(n)) = s(m + n)) \tag{4.2}$$

Untuk melihat bahwa definisi ini kompatibel dengan definisi standar untuk penjumlahan, kita ganti $s(n)$ di (4.2) dengan n+1, sehingga menjadi :

$$\forall m \forall n(m + (n + 1) = (m+n)+1)$$

Dan yang lebih penting, (4.2) dapat digunakan untuk membentuk penjumlahan dari dua bilangan natural.

Contoh 4.1. Tunjukkan bahwa $3 + 2 = s(s(s(0))) + s(s(0))$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} s(s(s(0))) + s(s(0)) &= s(s(s(s(0))) + s(0)) && \text{dengan (4.2)} \\ &= s(s(s(s(s(0)))+0)) && \text{dengan (4.2)} \\ &= s(s(s(s(s(0))))) && \text{dengan (4.1)} \end{aligned}$$

Perkalian dapat didefinisikan dengan pola yang sama. Yaitu :

$$\forall n(n \times 0 = 0) \tag{4.3}$$

$$\forall m \forall n(m \times s(n) = m \times n + m) \tag{4.4}$$

Persamaan (4.1) sampai (4.4) mengacu pada aksioma Peano 5 sampai 8. Definisi tipe seperti ini sering digunakan dalam logik dan bahasa pemrograman fungsional.

Aksioma Peano yang terakhir menunjukkan bahwa untuk setiap proposisi P, maka ekspresi berikut ini valid.

$$P(0) \wedge \forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))) \Rightarrow \forall n P(s(n)) \tag{4.5}$$

Aksioma terakhir membentuk prinsip induksi matematis.

4.1.2. Induksi Matematika

Jika P adalah sembarang hal yang mempunyai sifat yang berkenaan dengan sebuah bilangan natural, maka dapat membuat suatu pernyataan untuk $s(n)$, dengan memberikan pernyataan yang sama untuk n. Dengan demikian, jika $P(n)$ adalah sebuah predikat yang berhubungan dengan bilangan natural n, maka seharusnya lebih mudah untuk membuktikan atau menyangkal bahwa $P(n) \Rightarrow P(s(n))$. Misalkan $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ terbukti benar untuk semua n, dan misalkan $P(0)$ benar, maka derivasi berikut dapat diterima. Dalam derivasi ini, kita menggunakan angka 1,2,… sebagai pengganti $s(0)$,$s(s(0))$, dan seterusnya.

1. $\forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n)))$	premis
2. $P(0)$	premis
3. $P(0) \Rightarrow P(1)$	instantiasi 1 dengan n:=0
4. $P(1)$	2,3 dengan modus ponens
5. $P(1) \Rightarrow P(2)$	instantiasi 1 dengan n:=1
6. $P(2)$	4,5 dengan modus ponens
7. $P(2) \Rightarrow P(3)$	instantiasi 1 dengan n:=2
8. $P(3)$	6,7 dengan modus ponens
$\vdots$	

Karena ini dapat diteruskan sampai tak terhingga, bukti tersebut menunjukkan bahwa untuk semua x, $P(n)$ benar. Ini merupakan prinsip dari induksi matematis. Kita akan menyatakan aturan ini sebagai suatu aturan pengambilan kesimpulan. Aturan pengambilan kesimpulan ini diturunkan dari (4.5)

Induksi : Asumsikan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan asli, {0,1,2,…}, dan misalkan $P(n)$ mempunyai sifat bilangan asli. Maka terdapat aturan pengambilan kesimpulan (*rule of inference*) sebagai berikut

$$P(0),\ \forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))\ \vdash \forall n P(n)$$

$P(0)$ disebut dengan **basis induksi**, dan pernyataan $\forall n(P(n) \Rightarrow P(s(n))$ disebut **langkah induksi**. Dengan demikian basis induksi dan langkah induksi bersama-sama menyebabkan $P(n)$ benar untuk semua n. Perlu dicatat bahwa keduanya, basis induksi dan langkah induksi, diperlukan untuk menghasilkan konklusi bahwa $P(n)$ benar untuk semua n.

Pernyataan dalam langkah induksi dipilih dengan tepat, karena ini akan menunjukkan bahwa, ketika $P(n)$ benar, kita dapat melangkah ke bilangan berikutnya $s(n) = n+1$. Yang berarti langkah dari n ke $n+1$.

Pada subbab 1.6.5. digunakan suatu pendekatan untuk membuktikan bahwa $A \Rightarrow B$. Pertama diasumsikan A, dan kemudian dengan menggunakan A kita dapatkan B. Jika ini diperoleh maka kita dapat menyimpulkan bahwa $A \Rightarrow B$. Dengan catatan bahwa saat kita menyimpulkan $A \Rightarrow B$, A dihentikan atau dengan kata lain A tidak selalu bernilai benar. Ide ini sering digunakan untuk melakukan langkah induksi. Ketika kita mengasumsikan $P(n)$ dan mendapatkan $P(n+1)$ maka kita dapat menyimpulkan $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Karena $P(n)$ digunakan sebagai asumsi, maka $P(n)$ disebut **hipotesa induksi**.

Dengan singkat dapat diberikan langkah-langkah untuk mendapatkan $\forall n P(n)$:

Basis Induksi Buktikan $P(0)$ benar
Hipotesa induksi Asumsikan $P(n)$ benar
Bukti dengan hipotesa Tentukan n, dan dapatkan $P(n+1)$
Penghentian hipotesa Simpulkan $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ dan hentikan $P(n)$. Yang berarti $P(n)$ tidak perlu selalu bernilai benar.
Generalisasi Dengan mengabaikan $P(n)$, n menjadi variabel sejati dan kita dapat menggunakan universal generalization untuk menyimpulkan dari $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ dimana $\forall n(P(n) \Rightarrow P(n+1))$
Konklusi Dari basis induksi dan langkah induksi kita simpulkan :

$$\forall n P(n)$$

Tiga langkah "bukti dengan hipotesa","penghentian hipotesa" dan "generalisasi" merupakan langkah induksi

Contoh 4.2. Misal $H_n = 0$ untuk $n = 0$, dan selain itu $H_{n+1}=1+2H_n$. Buktikan bahwa $H_n = 2^n - 1$.

Penyelesaian :

Basis induksi : $P(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ terbukti benar
Hipotesa induksi : Asumsikan $P(n) = 2^n - 1$ benar untuk semua n.
Bukti hipotesa : dengan menggunakan asumsi diatas, kita akan menunjukkan $H_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ benar.

$$
\begin{aligned}
H_{n+1} &= 1 + 2H_n \\
&= 1 + 2(2^n - 1) \\
&= 1 + 2.2^n - 2 \\
&= 2.2^n - 1 \\
&= 2^{1+n} - 1 \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

Penghentian Hipotesa : Jika asumsi $P(n)$ benar maka $P(n+1)$ benar sehingga dapat dinyatakan bahwa :

$$(H_n = 2^n - 1) \Rightarrow (H_{n+1} = 2^{n+1} - 1)$$

Hipotesa induksi $H_n = 2^n - 1$ sekarang dihentikan.
Generalisasi : Karena n tidak muncul dalam hipotesa, kita dapat men-generalisasi terhadap n, sehingga :

$$\forall n((H_n = 2^n - 1) \Rightarrow (H_{n+1} = 2^{n+1} - 1))$$

Konklusi : menurut prinsip induksi, karena basis dan langkah induksi terbukti benar, maka kita dapat membuktikan bahwa

$$\forall n(H_n = 2^n - 1)$$

Karena langkah penghentian hipotesa induksi dan generalisasi dasarnya selalu sama, maka dapat kita abaikan. Berarti, langkah induksi hanya membuktikan bahwa $P(n+1)$ benar dengan menggunakan asumsi $P(n)$ benar. Karena dua langkah tersebut diabaikan, maka kita hanya menggunakan satu langkah yaitu "pembuktian dengan hipotesa" dan cukup kita tulis sebagai "langkah induksi" saja.

Contoh 4.3. Tunjukkan bahwa untuk semua n, berlaku $2(n+2) \leq (n+2)^2$

Penyelesaian : Pada contoh ini kita tetapkan $P(n)$ untuk menyatakan $2(n+2) \leq (n+2)^2$

Basis induksi : untuk $n = 0$

$$2(0+2) \leq (0+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq 4 \quad \text{(terbukti)}$$

Hipotesa induksi : diasumsikan $P(n)$: $2(n+2) \leq (n+2)^2$ benar
Langkah Induksi : Disini kita akan menunjukkan bahwa untuk $P(n+1)$ berlaku $2((n+1)+2) \leq ((n+1)+2)^2$.

$$
\begin{aligned}
2((n+1)+2) &= 2((n+2)+1) \\
&= 2(n+2) + 2 \\
&\leq (n+2)^2 + 2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq n^2 + 4n + 4 + 2\\
&\leq n^2 + 4n + 6 + 2n + 3\\
&\leq n^2 + 6n + 9\\
&\leq (n+3)^2\\
&\leq ((n+1)+2)^2
\end{aligned}$$

Konklusi : karena basis dan langkah induksi terpenuhi maka

$$\forall n(2(n+2) \leq (n+2)^2)$$

Contoh 4.4. Tunjukkan bahwa $n^3 + 2n$ habis dibagi 3

Penyelesaian :

Basis induksi : untuk $n = 0$

$0^3 + 2.0 = 0$ dan 0 habis dibagi 3 (terbukti)

Hipotesa induksi : diasumsikan $P(n)$: n^3+2n benar habis dibagi 3
Langkah Induksi : Maka untuk $P(n+1)$ berlaku $(n+1)^3+2(n+1)$ habis dibagi 3.

$$\begin{aligned}
(n + 1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2\\
&= n^3 + 3n^2 + 5n + 3\\
&= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3)\\
&= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)
\end{aligned}$$

Dari asumsi kita dapatkan bahwa $(n^3 + 2n)$ habis dibagi 3 dan $3(n^2 + n + 1)$ juga habis dibagi 3. Sehingga terbukti bahwa $(n + 1)^3 + 2(n+1)$ habis dibagi 3.

Konklusi : karena basis dan langkah induksi terpenuhi maka

$$\forall n(n^3+2n \text{ habis dibagi } 3)$$

Latihan Soal 4.1

1. Misalkan $n = s(s(2))$. Tentukan $s(s(s(n)))$.
2. Jika diberikan premis $s(n) > n$ dan $n > m \Rightarrow s(n) > m$, buktikan bahwa $\forall n(s(n)>0)$
3. Buktikan bahwa $(n+2)!$ adalah genap
4. Buktikan bahwa penjumlahan bersifat assosiatif.
5. Buktikan bahwa $n^2 \geq 2n+3$ untuk $n\geq3$.
6. Buktikan bahwa $2^n \geq n^2$ untuk $n\geq4$

4.2. *Jumlahan (sum)*

Ada sebuah notasi khusus untuk menyatakan jumlah dari beberapa nilai, yaitu $\sum$ atau notasi sigma. Definisi rekursif dari sigma yang diberikan akan digunakan untuk membuktikan sejumlah hasil penting yang meliputi jumlahan dengan induksi matematik. Notasi yang serupa dengan $\sum$ digunakan untuk menotasikan hasil kali, konjungsi dan disjungsi.

4.2.1. Definisi Rekursif Dari Jumlah dan Hasil Kali

Notasi sigma adalah notasi untuk menyatakan jumlah dari beberapa term. Secara khusus jika a_m, a_{m+1}, …, a_n adalah term, maka jumlah term-term ini ditulis sebagai : $\sum_{i=m}^{n} a_i$. Sehingga :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

Dimana *i* adalah index dari jumlahan tersebut, *m* adalah batas bawah (*lower bound*) dan *n* adalah batas atas (*upper bound*). Batas atas bersama dengan batas bawah menunjukkan jangkauan (*range*) dari indeksnya. Jika batas atas kurang dari batas bawah, maka jumlahan tersebut tidak mempunyai term; atau kosong. Hasil dari jumlahan kosong adalah nol. Contohnya $\sum_{i=4}^{3} a_i = 0$.

Contoh 4.5 : Nyatakan jumlah bilangan bulat dari 3 sampai 20 dengan notasi sigma.

Penyelesaian : $\sum_{i=3}^{20} i = 3 + 4 + \ldots + 20$

Contoh 4.6 : Tentukan nilai dari $\sum_{4}^{9} 1$

Penyelesaian : karena jumlah dalam pertanyaan diatas mempunyai 6 term yaitu a_4, a_5, …,a_9 dan semuanya bernilai 1, maka jumlahnya sama dengan 1+1+1+1+1+1 = 6

Definisi rekursif berikut mempermudah penerapan induksi.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0 \qquad \text{jika } m > n \qquad (4.6)\text{a}$$

$$\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1} \qquad \text{jika } m \le n+1 \qquad (4.6)\text{b}$$

Contoh 4.7 : Perhatikan ekspresi $\sum_{i=1}^{3} = 2i$. Menurut (4.6) kita punya :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} 2^i &= \sum_{i=1}^{2} 2^i + 2^3 \\ &= \sum_{i=1}^{1} 2^i + 2^2 + 2^3 \\ &= \sum_{i=1}^{0} 2^i + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.6) juga menghasilkan persamaan :

$$\sum_{i=n}^{n} a_i = \sum_{i=n}^{n-1} a_i + a_n = 0 + a_n$$

Definisi yang diberikan dalam persamaan (4.6) dapat dikembangkan dengan mengganti tanda + dengan operator lain seperti $\times$, $\wedge$ dan $\vee$. Jika batas atas dibawah batas bawahnya, kita ganti 0 dengan identitas dari operatornya. Untuk mengekspresikan hasil kali dengan pola ini, kita gunakan simbol $\prod$. Hasil kali dari faktor-faktor $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ kita tulis sebagai berikut :

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m a_{m+1} \ldots a_n$$

Jika m > n, hasil kali sama dengan 1, yang merupakan elemen identitas dari perkalian. Definisi rekursif dari $\prod$ adalah :

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = 1 \qquad \text{jika m > n}$$

$$\prod_{i=m}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=m}^{n} a_i \right) \times a_{n+1} \qquad \text{jika m} \leq \text{n+1}$$

Untuk operator lain, kita gunakan simbol versi besar dari simbol operatornya sebagai pengganti simbol $\sum$. Sebagai contoh, disjungsi dari P_i, $i=m, m+1, \ldots, n$, dinyatakan sebagai berikut :

$$\bigvee_{i=m}^{n} P_i = P_m \vee P_{m+1} \vee \ldots \vee P_n$$

Jika batas atas lebih kecil dari batas bawah, konjungsinya sama dengan F, yang merupakan identitas dari disjungsi. Dengan cara yang sama kita dapat juga menyatakan konjungsi P_i sebagai berikut :

$$\bigwedge_{i=m}^{n} P_i = P_m \wedge P_{m+1} \wedge \ldots \wedge P_n$$

Secara umum, jika $\otimes$ adalah sembarang operator dengan identitas e, maka mempunyai definisi rekursif dari $\otimes$ sebagai berikut :

$$\bigotimes_{i=m}^{n} a_i = e \qquad \text{jika m > n}$$

$$\bigotimes_{i=m}^{n+1} a_i = \bigotimes_{i=m}^{n} a_i \otimes a_{n+1} \qquad \text{jika m} \leq \text{n+1}$$

Notasi yang diperkenalkan sebelumnya berhubungan erat dengan pengukur jumlah (*quantifier*). Khususnya jika semesta pembicaraan terdiri dari a_1, a_2, …, a_n maka kita mempunyai :

$$\exists x P(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} P(a_i)$$

$$\forall x P(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} P(a_i)$$

Jika domain adalah himpunan bilangan asli (natural), maka

$$\exists x P(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{\infty} P(x)$$

$$\forall x P(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(x)$$

Ini menunjukkan bahwa indeks dari suatu jumlahan berhubungan erat dengan variabel terbatas x. Kebanyakan aturan yang diformulasikan untuk variabel-variabel terbatas juga dapat menggunakan indeks, dimana indeks-indeks tersebut berupa jumlahan, konjungsi atau disjungsi. Semua bentuk yang berhubungan dengan a_i, yang dapat menjadi fungsi dari indeks i. Fungsi-fungsi ini dari ruang lingkup sumasi, hasil kali dan sebagainya. Indeks i harus berada dalam ruang lingkup lokal. Jika i ada diluar ruang lingkup, maka bisa dianggap sebagai suatu variabel yang berbeda.

4.2.2. Beberapa Sifat Jumlahan

Ada beberapa sifat jumlahan yang penting yaitu :

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i \tag{4.7}$$

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i + b) = \left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) + (n - m + 1)b, \quad n \geq m\text{-}1 \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=m}^{n}(a_i b) = b\sum_{i=m}^{n} a_i \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1+k}^{n+k} a_{i-k} \tag{4.10}$$

Persamaan (4.7) – (4.10) dapat dibuktikan dengan induksi.

4.3. *Definisi Rekursi*

Pembuktian dengan rekursi adalah suatu pembuktian induksi yang tidak perlu sama dengan bilangan asli. Kenyataannya, bukti dengan rekursi lebih umum daripada induksi matematis pada bilangan asli, dan mungkin membuktikan induksi matematis dalam domain bilangan asli dengan menggunakan pembuktian dengan rekursi.

Di semua kasus, pembuktian dengan rekursi berdasar pada definisi dari domain, karena definisi ini menyediakan premis-premis yang diperlukan. Karena alasan ini, berikut ini kita bahas masalah definisi rekursif, dengan menggunakan contoh. Jika x adalah orang, maka dengan definisi, semua orang berikut adalah keturunan x.

1. Semua anak x adalah keturunan dari x
2. Jika y adalah seorang anak x, maka semua keturunan y merupakan keturunan x.

3. Tidak ada orang lain yang merupakan keturunan dari x.

Untuk menentukan apakah orang tertentu merupakan salah satu keturunan dari x, kita perlu menerapkan definisi ini secara berulang atau dengan istilah teknik, secara rekursif. Diasumsikan bahwa rekursi ini selalu mencapai akhir. Jawabannya bisa positif, dalam hal ini seseorang itu adalah keturunan x, atau negatif, yang berarti tidak ada orang yang sesuai dengan definisi tersebut.

Dalam suatu definisi rekursif, kita bedakan antara sebuah aturan dasar (*rule base*) dan aturan rekursif (*recursive rule*). Aturan dasar dari sebuah definisi rekursif menggambarkan istilah yang didefinisikan secara langsung. Dalam kasus keturunan tersebut, aturan dasar menetapkan bahwa semua anak dari x adalah keturunan dari x. Aturan rekursif berisi istilah untuk mendefinisikan definisi itu sendiri. Contohnya, semua anak dari seorang keturunan didefinisikan menjadi keturunan. Disini dapat dibayangkan menyerupai lingkaran, yang memungkinkan menggunakan bagian rekursif dari definisi berulang kali, atau secara rekursif.

Sekarang akan kita lihat beberapa contoh definisi rekursif dalam bidang matematika. Pertama, kita tentukan sesuatu yang disebut ekspresi-LS, singkatan dari ekspresi *Logika Sederhana*. Yang didefinisikan sebagai berikut :

1. Semua variabel proposisi adalah ekspresi LS.
2. Jika A dan B adalah dua ekspresi LS, demikian juga dengan $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$ dan $\neg A$.
3. Selain itu bukan ekspresi LS.

Definisi pertama yang menyatakan bahwa semua variabel proposisi adalah suatu ekspresi LS, merupakan aturan dasar (*base rule*) dari definisi tersebut. Semua hal lain didefinisikan secara rekursif untuk mendefinisikan apakah sesuatu merupakan ekspresi LS. Dengan menerapkan bagian rekursif secara berulang, ekspresi dari singkatan yang kompleks dapat dibuat.

Dengan pola yang sama kita dapat mendefinisikan ekspresi matematika secara rekursif, yaitu :

1. Semua bilangan bulat dan semua variabel adalah ekspresi matematika.
2. Jika A dan B dua ekspresi matematika, maka $-A$, $(A+B)$, $(A-B)$, $(A\times B)$, dan (A/B) adalah ekspresi matematika
3. Selain itu bukan merupakan ekspresi matematika.

Aturan rekursif (*recursive rule*) dapat diklasifikasikan menjadi aturan pemendekan (*shortening rule*) dan aturan pemanjangan (*lengthening rule*). Dalam suatu aturan pemanjangan, obyek baru didefinisikan lebih panjang daripada komponen-komponen yang digunakan definisi itu sendiri. Semua aturan yang dibicarakan diatas termasuk dalam aturan pemanjangan. Sebagai contoh, aturan "jika A dan B adalah dua ekspresi LS, maka demikian juga dengan $(A \wedge B)$" adalah sebuah aturan pemanjangan: ekspresi baru $(A \wedge B)$ lebih panjang dari komponen-komponennya A dan B. Tidak semua aturan merupakan aturan perpanjangan. Contohnya, aturan "jika (A) sebuah ekspresi LS, maka A juga suatu ekspresi LS" adalah aturan pemendekan.