

Kalkulus Predikat

Secara umum, predikat digunakan untuk menggambarkan hubungan antara obyek-obyek. Sebagai contoh, dalam kalimat “Mari dan Ani adalah saudara”, frasa “adalah saudara” merupakan sebuah predikat. Entitas yang dihubungkan, Mari dan Ani, disebut *term*. Term memainkan peranan dalam kalkulus predikat sebagai kata benda seperti dalam tata bahasa Indonesia. Kadang perlu menambahkan pengukur (*quantifier*) ke dalam predikat dan term. Pengukur menunjukkan seberapa banyak suatu pernyataan bernilai benar. Khususnya, pengukur *universal* digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan selalu benar, dan pengukur eksistensial menunjukkan pernyataan itu ada yang benar untuk suatu nilai tertentu. Contohnya, dalam kalimat “Semua kucing mempunyai ekor”, kata “semua” menyatakan bahwa pernyataan “kucing mempunyai ekor” secara umum benar.

Kalkulus predikat merupakan suatu generalisasi dari kalkulus proposisi. Disamping term, predikat dan pengukur, kalkulus predikat terdiri dari proposisi dan kata sambung sebagai bagian dari bahasa. Bagian penting dari kalkulus predikat adalah fungsi, yang akan dijelaskan pada bab ini. Fungsi penting saat menggunakan persamaan, dan pemakaiannya menjadi dasar semua manipulasi aljabar.

Kalkulus predikat banyak digunakan dalam beberapa bahasa pemrograman logik maupun untuk aplikasi tertentu misalkan dalam teori kecerdasan buatan.

3.1. Komponen Sintaks Dari Kalkulus Predikat

Predikat kalkulus mengandung semua komponen dalam kalkulus proposisi meliputi variabel proposisi dan konstanta. Sebagai tambahan, kalkulus predikat terdiri dari *term*, predikat dan pengukur (*quantifier*). Term biasanya berupa kata benda atau kata ganti. Term-term ini digabungkan dalam kalimat dengan predikat di tengahnya. Contoh dalam kalimat “Aku cinta kamu”, “aku” dan “kamu” merupakan kata benda, dan “cinta” adalah predikat. Jika kalimat tersebut diterjemahkan dalam kalkulus predikat, maka “aku” dan “kamu” disebut dengan term. Kalkulus menggunakan pengukur untuk menunjukkan jika suatu pernyataan selalu bernilai benar, jika ada kalanya benar, atau jika tidak pernah bernilai benar. Pengukur-pengukur ini dalam bahasa Indonesia biasanya menggunakan kata-kata seperti “semua”, “ada”, “tidak ada” dan diikuti pernyataan yang diukur.

3.1.1. Semesta Pembicaraan (*Universe of Discourse*)

Untuk menjelaskan konsep dari semesta pembicaraan, perhatikan argumen logik berikut :

1. *Umi adalah Ibu Ahmad*
2. *Umi adalah Ibu Anisa*
3. *Dua orang yang mempunyai ibu yang sama adalah saudara kandung*
-
4. *Ahmad dan Anisa adalah saudara kandung*

Nilai kebenaran dari pernyataan “Umi adalah Ibu Ahmad” hanya bisa diperkirakan dalam suatu konteks tertentu. Karena banyak orang yang bernama Umi dan Ahmad, maka kita harus memberikan keterangan atau batasan Umi dan Ahmad yang mana yang dimaksudkan dalam pernyataan tersebut, agar tidak membingungkan. Inilah yang dimaksud dengan konsep semesta pembicaraan (*universe of discourse*) atau disebut juga dengan **domain**.

Definisi 3.1 : Semesta pembicaraan (*universe of discourse*) atau **domain** adalah himpunan dari semua orang, ide, simbol, data struktur dan sebagainya, yang mempengaruhi pemberian nilai sebuah argumen logik. Elemen atau anggota dari semesta pembicaraan disebut *individu*.

Dalam argumen tentang Umi dan Ahmad diatas, domainnya bisa berupa himpunan orang-orang yang tinggal di sebuah rumah atau di RT tertentu. Nilai kebenaran suatu pernyataan tergantung pada domain yang dipilih. Misalkan pernyataan “Ada suatu bilangan terkecil”, akan bernilai benar jika domainnya adalah bilangan asli, tetapi akan bernilai salah untuk domain bilangan bulat.

Elemen dari domain disebut dengan individu. Suatu individu dapat berupa seseorang, sebuah bilangan, suatu struktur data atau sesuatu yang lainnya yang ingin dibicarakan. Setiap domain harus berisi paling sedikit satu individu. Sehingga, himpunan semua bilangan asli yang kurang dari 0 bukan merupakan domain karena tidak ada bilangan asli yang negatif. Kata individu disebut juga *obyek*. Untuk menunjukkan individu atau obyek tertentu, digunakan pengenal (*identifier*). Identifier ini disebut **konstanta individu** (*individual constants*). Jika domainnya orang, konstanta individu bisa namanya. Jika bilangan, konstanta individu berupa digit dari bilangan tersebut (misalkan 0,1,2,...). Konstanta individu

harus mewakili suatu individu tertentu secara unik. Artinya, dalam domain orang, misalkan, tidak boleh ada nama yang sama lebih dari satu.

3.1.2. Predikat

Secara umum, predikat membuat pernyataan mengenai individu-individu. Perhatikan pernyataan berikut :

Ahmad dan Anisa adalah saudara kandung

Umi adalah ibu dari Anisa

Tom adalah seekor kucing

Jumlah dari 2 dan 3 adalah 5

Dalam tiap pernyataan diatas ada rangkaian individu, yang diberikan oleh daftar argumen (*argument list*) bersama-sama dengan frasa yang menjelaskan hubungan dari individu-individu tersebut di dalam barisan argumen. Hubungan ini dinyatakan dengan predikat. Misalkan dalam pernyataan "Ahmad dan Anisa adalah saudara kandung", daftar argumen diberikan oleh "Ahmad dan Anisa" dan predikatnya dinyatakan dengan frasa "adalah saudara kandung". Isi dari daftar argumen dapat berupa variabel atau konstanta individu.

Dalam kalkulus predikat, setiap predikat diberikan suatu nama, yang diikuti dengan daftar argumen. Daftar argumen diletakkan dalam tanda kurung. Contohnya untuk menyatakan "Umi adalah Ibu dari Anisa" kita gunakan suatu identifier "ibu" untuk menyatakan predikat "adalah ibu dari", dan dituliskan ibu(Umi,Anisa). Kita juga dapat menggunakan huruf tunggal untuk nama predikat dan konstanta. Misalkan predikat diatas dapat dituliskan sebagai $M(a,b)$ dimana M menyatakan "ibu" dan a,b berturut-turut menyatakan Umi dan Anisa.

Perlu diperhatikan bahwa urutan argumen dalam suatu kalkulus predikat memegang peranan penting. Pernyataan Ibu(Umi, Anisa) dan Ibu(Anisa,Umi) artinya akan berbeda. Jumlah elemen dalam daftar argumen suatu predikat disebut *aritas* dari predikat tersebut. Contohnya, Ibu(Umi, Anisa) mempunyai *aritas* 3. *Aritas* dari suatu predikat harus tetap. Artinya untuk sebuah predikat tidak boleh mempunyai dua argumen pada suatu kasus dan mempunyai tiga argumen untuk yang lainnya. Contoh pernyataan berikut :

Jumlah 2 dan 3 adalah 5

Jumlah 2,3,dan 4 adalah 9

Kedua pernyataan tersebut mempunyai predikat yang sama yaitu "jumlah", tetapi yang pertama mempunyai tiga argumen sedangkan yang kedua mempunyai tiga

argumen. Kita tidak boleh menyatakan dengan nama predikat yang sama yaitu Jumlah(2,3,5) dan Jumlah(2,3,4,9). Untuk mengatasinya, kita gunakan dua nama predikat yang berbeda misalkan Jumlah2(2,3,5) dan Jumlah3(2,3,4,9)

Suatu predikat dengan *aritas* n disebut dengan predikat **n -posisi** (*n-place*). Predikat satu-tempat disebut dengan **properti** (*property*).

Contohnya, predikat “adalah seekor kucing” dari kalimat “Tom adalah seekor kucing” merupakan sebuah properti. Predikat pada kalimat “jumlah 2 dan 3 adalah 5” merupakan predikat 3-tempat.

Sebuah nama predikat yang diikuti dengan suatu daftar argumen di dalam kurung, disebut suatu **formula atomik** (*atomic formula*). Formula atomik adalah pernyataan dan tentu saja dapat dikombinasikan dengan kata sambung logik seperti proposisi. Misalkan untuk menyatakan bahwa Umi adalah ibu dari Anisa kita gunakan formula atomik Ibu(Umi,Anisa) dan pernyataan ini dapat menjadi bagian dari suatu pernyataan gabungan seperti di bawah ini :

$$\text{Ibu}(\text{Umi}, \text{Anisa}) \Rightarrow \neg \text{Ibu}(\text{Anisa}, \text{Umi})$$

Yang dibaca “Jika Umi adalah ibu Anisa, maka Anisa bukan ibu dari Umi”.

Jika semua argumen dari suatu predikat merupakan konstanta individu, maka formula atomik dapat bernilai benar atau salah. Metode yang memberikan nilai kebenaran untuk semua kemungkinan kombinasi dari individu dalam sebuah predikat disebut pemberian nilai kebenaran (*assignment*) dari predikat tersebut. Jika suatu predikat mempunyai dua argumen, pemberian nilai kebenarannya diberikan oleh sebuah tabel dimana barisnya menyatakan argumen pertama dan kolomnya mewakili argumen yang kedua. Contohnya, pemberian nilai kebenaran dari predikat “lebih besar” dengan domain angka 1,2,3 dan 4. Dimana pernyataan “lebih besar (1,2)” dibaca “1 lebih besar dari 2”, akan mempunyai nilai kebenaran salah. Selengkapnya dapat dilihat dalam tabel pemberian nilai kebenaran berikut:

	1	2	3	4
1	F	F	F	F
2	T	F	F	F
3	T	T	F	F
4	T	T	T	F

Tabel 3.1. Pemberian nilai kebenaran untuk predikat “lebih besar”

Dalam suatu semesta pembicaraan yang terhingga, kita dapat menyatakan pemberian nilai kebenaran dari predikat dengan aritas n dalam array n -dimensi. Catatan, bahwa simbol matematika $<$ dan $>$ adalah predikat. Predikat-predikat ini normalnya digunakan dalam notasi infiks. Artinya kita biasa menuliskan pernyataan " $2 > 3$ " dibandingkan $>(2,3)$.

3.1.3. Variabel dan Instantiasi (*Instantiation*)

Terkadang kita tidak menyatakan argumen dari suatu formula atomik dengan suatu individu tertentu. Dalam hal ini kita menggunakan suatu variabel, yang biasanya dinyatakan dengan huruf x , y dan z . Contoh pernyataan yang mengandung variabel :

$$\begin{aligned} Kucing(x) &\Rightarrow PunyaEkor(x) \\ Anjing(y) &\wedge Coklat(y) \\ Peringkat(x) &\Rightarrow (x > 0) \wedge (x < 100) \end{aligned}$$

Sebagaimana dalam kalkulus proposisi, sebuah pernyataan dapat diberi nama. Misalkan :

$$A = Kucing(x) \Rightarrow PunyaEkor(x)$$

Jika pernyataan A mengandung variabel x , maka dikatakan bahwa A mengandung x . Seperti contoh yang diberikan diatas, bahwa A mengandung x dan tidak mengandung y .

Sebuah variabel dalam predikat dapat diganti dengan suatu konstanta tertentu. Disini digunakan istilah term untuk menyatakan sebuah variabel atau konstanta. Contohnya dalam pernyataan $Kucing(x) \Rightarrow PunyaEkor(x)$, jika $x = \text{"Tom"}$ maka pernyataan tersebut menjadi :

$$Kucing(\text{Tom}) \Rightarrow PunyaEkor(\text{Tom})$$

Definisi 3.2 : Misalkan A sebuah ekspresi, x adalah variabel, dan t menyatakan sebuah term. Maka $S_t^x A$ menyatakan ekspresi yang diperoleh dengan mengganti semua variabel x yang ada dalam A dengan t . $S_t^x A$ disebut instantiasi (*instantiation*) dari A dan t dikatakan sebagai instan dari x .

Contohnya jika $A = \text{Kucing}(x) \Rightarrow \text{PunyaEkor}(x)$ maka

$$S_{Tom}^x A$$

menghasilkan pernyataan :

$$\text{Kucing}(Tom) \Rightarrow \text{PunyaEkor}(x)$$

Contoh 3.1 : Misalkan a, b dan c adalah konstanta individu, P dan Q adalah simbol predikat, dan x, y adalah variabel. Tentukan :

$$S_a^x (P(a) \Rightarrow Q(x))$$

$$S_a^y (P(y) \vee Q(y))$$

$$S_a^y Q(a)$$

$$S_a^y (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

Penyelesaian :

$$S_a^x (P(a) \Rightarrow Q(x)) = P(a) \Rightarrow Q(a)$$

$$S_a^y (P(y) \vee Q(y)) = P(a) \vee Q(a)$$

$$S_a^y Q(a) = Q(a)$$

$$S_a^y (P(x) \Rightarrow Q(x)) = P(x) \Rightarrow Q(x)$$

3.1.4. Pengukur Jumlah (*Quantifier*)

Salah satu cara untuk menentukan nilai kebenaran dari suatu predikat adalah dengan menggunakan batasan nilai yang disebut **pengukur jumlah (*Quantifier*)** dari variabel-variabelnya. Pengukur jumlah tersebut adalah :

1. *Universal quantifier* (\forall)

Definisi 3.3: Misalkan A sebuah pernyataan, dan x menyatakan suatu variabel. Jika kita ingin menunjukkan bahwa A bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai x , kita tuliskan $\forall x A$. $\forall x$ disebut pengukur jumlah universal (*universal quantifier*), dan A dikatakan sebagai ruang lingkup (*scope*) dari pengukur jumlah tersebut. Variabel x dikatakan menjadi variabel terbatas (*bound*) dari pengukur jumlah tersebut. Simbol \forall dibaca "Untuk semua".

Untuk pernyataan “Semua kucing punya ekor” dapat kita nyatakan dalam kalkulus predikat sebagai :

$$\forall x (Kucing(x) \Rightarrow PunyaEkor(x))$$

2. Existential quantifier (\exists)

Definisi 3.4: Misalkan A sebuah pernyataan, dan x menyatakan suatu variabel. Jika kita ingin menunjukkan bahwa A bernilai benar untuk sedikitnya satu nilai x , kita tuliskan $\exists x A$, yang dibaca “Ada satu x yang memenuhi A ”. $\exists x$ disebut pengukur jumlah eksistensial (*existential quantifier*), dan A dikatakan sebagai ruang lingkup (*scope*) dari pengukur jumlah tersebut. Variabel x dikatakan menjadi variabel terbatas (*bound*) dari pengukur jumlah tersebut.

Contohnya, jika domain berupa sekumpulan benda, maka $\exists x \text{Blue}(x)$ menyatakan bahwa “Ada benda yang berwarna biru”.

Semua pengukur jumlah tersebut diperlakukan seperti operator uner, yang mempunyai tingkat presedensi lebih tinggi daripada operator biner. Sebagai contoh, misalkan $P(x)$ mewakili pernyataan “ x hidup” dan $Q(x)$ untuk “ x mati” maka

$$\begin{aligned} \forall x (P(x) \vee Q(x)) & \text{ diartikan bahwa "semua hidup atau mati" tetapi} \\ \forall x P(x) \vee Q(x) & \text{ diartikan "semua hidup atau } x \text{ mati"} \end{aligned}$$

Variabel x dalam suatu pengukur jumlah dapat digantikan dengan variabel lain tanpa merubah arti dari seluruh pernyataan yang diwakilinya. Misalkan $\forall x P(x)$ dengan $\forall y P(y)$ adalah hal yang sama; dan secara logika keduanya ekuivalen. Pernyataan $\forall y P(y)$ disebut sebagai *variant* dari $\forall x P(x)$.

Definisi 3.6 : Sebuah pernyataan dikatakan suatu variant dari $\forall x A$ jika berasal dari bentuk $\forall y S_y^x A$, dimana y adalah sembarang nama variabel, dan $S_y^x A$ adalah ekspresi yang didapat dari A dengan mengganti semua x dengan y . Demikian juga, $\exists x A$ dan $\exists y S_y^x A$ adalah variant dari yang lain.

Pengukur jumlah (*quantifier*) mungkin terjadi secara bersarang. Dimana ada suatu pengukur jumlah dalam satu pernyataan yang didalamnya mengandung suatu pengukur jumlah yang lain.

Contoh 3.3. Rubah pernyataan “Ada orang yang mengenal semua orang” dalam bahasa kalkulus predikat. Gunakan $K(x,y)$ untuk menyatakan “ x kenal y ”

Penyelesaian : Pernyataan diatas dapat diganti menjadi

$$\exists x (x \text{ kenal semua orang})$$

kalimat “ x kenal semua orang” dapat diartikan bahwa “untuk semua y benar bahwa x kenal y ”, sehingga dapat dituliskan

$$\text{“}x \text{ kenal semua orang”} = \forall y K(x,y)$$

Jadi bentuk kalkulus predikatnya adalah :

$$\exists x (\forall y K(x,y)) = \exists x \forall y K(x,y)$$

Dalam predikat kalkulus, pernyataan “tidak ada orang mempunyai P ” tidak dapat dinyatakan secara langsung. Untuk menyatakan kalimat “tidak ada x yang memenuhi A benar” dapat digunakan $\neg \exists x A$ atau $\forall x \neg A$. Sebagai contoh, jika P menyatakan “memiliki kesempurnaan”, $\neg \exists x P(x)$ dan $\forall x \neg P(x)$ keduanya menunjukkan bahwa tidak ada orang yang sempurna. $\neg \exists x P(x)$ dapat dibaca sebagai “tidak benar bahwa ada orang yang memiliki kesempurnaan” dan $\forall x \neg P(x)$ dibaca “Semua orang tidak ada yang memiliki kesempurnaan”. Dua metode yang digunakan diatas secara logika ekivalen, sehingga dapat dituliskan :

$$\neg \exists x A \equiv \forall x \neg A \quad (3.1)$$

Menurut definisi 3.3 dan 3.4 variabel yang ada dalam pengukur jumlah dikatakan terbatas (*bound*). Variabel yang tidak terbatas disebut variabel bebas (*free*). Contoh dari pernyataan $\forall z (P(z) \wedge Q(x)) \vee \exists y Q(y)$, hanya variabel x yang merupakan variabel bebas. Sedangkan z dan y adalah variabel-variabel terbatas.

Perlu dicatat bahwa status dari variabel akan berubah saat ekspresi dibagi dalam subekspresi-subekspresi. Contohnya, dalam $\forall x P(x)$, x muncul dua kali, dan keduanya terbatas. Pernyataan ini mempunyai subekspresi $P(x)$. Dan dalam $P(x)$, variabel x adalah variabel bebas.

Instantiasi hanya berpengaruh pada variabel-variabel bebas. Artinya jika A adalah sebuah pernyataan, $S_y^x A$ hanya berpengaruh pada variabel x yang bebas. Contoh

$$S_y^x \forall_x P(x) = \forall_x P(x)$$

$$S_y^x (Q(x) \wedge \forall_x P(x)) = Q(y) \wedge \forall_x P(x)$$

Jadi instantiasi memperlakukan variabel x secara berbeda, tergantung apakah dia bebas atau terbatas, bahkan jika variabel ini muncul dua kali dalam ekspresi yang sama. Ini berarti, jika suatu variabel muncul bebas dan terbatas dalam ekspresi yang sama, maka kita harus menganggapnya dua variabel yang berbeda dengan nama yang sama.

Variabel bebas terkadang dianggap seperti variabel lokal dalam suatu bahasa pemrograman. Kita perlu berhati-hati saat membentuk variant dari ekspresi yang mengandung variabel lokal. Contohnya pada ekspresi “ y punya seorang ibu”. Jika M adalah nama predikat untuk “ibu dari” maka pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai $\exists_x M(x,y)$. Kita tidak boleh membentuk variant $\exists_y M(y,y)$ yang berarti y punya ibu dirinya sendiri. Demikian juga ada pembatasan pada instantiasi. Sebagai contoh, instantiasi $S_x^y (\exists_x M(x,y))$ tidak boleh, karena akan menghasilkan $\exists_x M(x,x)$.

Jika semua kemunculan x dalam suatu ekspresi A terbatas, dikatakan “ A tidak mengandung x bebas”. Jika A tidak mengandung x bebas, maka nilai kebenaran dari A tidak berubah jika x diinstantiasi menjadi suatu konstanta individu. Dalam hal ini, A tidak bergantung (*independent*) pada x .

3.1.5. Pembatasan Pengukur Jumlah Terhadap Kelompok Tertentu

Terkadang, pengukuran jumlah berdasarkan himpunan bagian dari domainnya. Sebagai contoh, pada domain binatang. Bagaimana kita menyatakan ekspresi “Semua anjing adalah mamalia” dan “ada anjing yang berwarna coklat?”. Untuk pernyataan pertama, kita perlu memberikan batasan bahwa binatang yang dimaksud adalah anjing, sehingga pernyataan tersebut dapat dinyatakan sebagai “jika x anjing, maka x mamalia”. Dan untuk x anggota himpunan binatang, pernyataan tersebut dalam kalkulus proposisi adalah :

$$\forall x (\text{anjing}(x) \Rightarrow \text{mamalia}(x))$$

Secara umum, kalimat

$$\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

dapat diterjemahkan sebagai “semua individu dengan sifat P juga mempunyai sifat Q ”

Sekarang untuk pernyataan “ada anjing yang berwarna coklat”, yang berarti ada binatang yang disebut anjing dan berwarna coklat. Sehingga dapat dinyatakan sebagai “ x adalah anjing dan x berwarna coklat” dan dapat dituliskan sebagai :

$$\text{Anjing}(x) \wedge \text{Coklat}(x)$$

Jadi “Ada anjing berwarna coklat” dapat dinyatakan sebagai :

$$\exists x (\text{Anjing}(x) \wedge \text{Coklat}(x))$$

Pernyataan :

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

secara umum, diartikan sebagai “ada individu dengan sifat P dan juga sifat Q ”. Jadi jika pengukur jumlah universal digunakan untuk individu yang mempunyai sifat tertentu, kita menggunakan kondisional untuk membatasi semesta pembicaraannya. Dan sebaliknya untuk pemakaian pengukur jumlah eksistensial, kita menggunakan konjungsi.

Terakhir, untuk pernyataan yang mengandung kata “hanya”, seperti “hanya anjing yang menyalak”. Untuk merubah ke dalam kalkulus predikat tulis ulang menjadi “Dia menyalak jika dia seekor anjing” atau ekuivalen dengan “Jika dia menyalak maka dia seekor anjing”. Sehingga dapat dinyatakan sebagai :

$$\forall x (\text{menyalak}(x) \Rightarrow \text{anjing}(x))$$

Latihan Soal 3.1

1. Untuk setiap predikat berikut, tentukan semesta pembicaraan yang sesuai dari daftar himpunan berikut : bilangan riil, bilangan bulat, manusia, dan binatang
 - a. $\text{Burung}(x)$
 - b. $\text{Menikah}(x)$
 - c. $\text{Genap}(x)$
 - d. $\text{Negatif}(x)$
 - e. $\text{Ibu}(x)$
2. Nyatakan kalimat berikut dalam kalkulus predikat. Semesta pembicaraannya adalah himpunan semua orang
 - a. Jika Marni menyukai Wati, dan Wati menyukai Yuli, maka Marni menyukai Yuli.

- b. John sangat sibuk tetapi Bill tidak.
 - c. Beny kenal Bapak Sujono, tetapi Bapak Sujono tidak mengenal Beny
3. Terjemahkan pernyataan berikut dalam predikat kalkulus, dengan domain himpunan bilangan bulat
- a. Jika x adalah bilangan antara 1 dan 2, dan jika y antara 2 dan 3, maka selisih antara x dan y tidak lebih dari 3. Gunakan predikat $b(x,y,z)$ untuk " x antara y dan z " dan $d(x,y,z)$ untuk " x dan y lebih besar z "
 - b. Jika x habis dibagi 3 maka x bukan bilangan prima. Gunakan $d(x,y)$ untuk " x habis dibagi y " dan $p(x)$ untuk " x bilangan prima".
 - c. " $x+y=z$ dan $x+z=u$ ". Gunakan $s(x,y,z)$ untuk " $x+y=z$ "
4. Misalkan semesta pembicaraan adalah sekelompok orang. Nyatakan kalimat "Setiap orang berbicara dalam bahasa Inggris atau Indonesia" dalam predikat kalkulus.
5. Instantiasi :
- a. $S_3^x P(x,y)$
 - b. $S_y^x P(x,y)$
 - c. $S_y^x (P(x) \wedge \forall x Q(x))$
 - d. $S_2^x (P(x) \wedge Q(y) \wedge R(x,y))$
6. Tentukan mana yang merupakan variabel bebas dan variabel terbatas dalam pernyataan : $\forall x \exists y (P(x,y,z) \wedge Q(y,z)) \wedge R(x)$
7. Dalam domain himpunan binatang, bagaimana menterjemahkan ekspresi berikut ini dalam kalkulus proposisi :
- a. Semua singa adalah predator
 - b. Ada singa yang hidup di Afrika
 - c. Hanya singa yang mengaum
 - d. Ada singa yang makan zebra
 - e. Ada singa yang hanya makan zebra
8. Untuk domain himpunan bilangan asli, nyatakan kalimat berikut dalam kalkulus proposisi. Gunakan $P(x)$ untuk " x adalah bilangan prima" dan $Q(x)$ untuk " x genap", dan $R(x,y)$ untuk " $x < y$ "
- a. Ada bilangan prima yang genap
 - b. Semua bilangan genap lebih besar dari 1
 - c. Bilangan genap adalah prima hanya jika kurang dari 3
 - d. Tidak ada bilangan prima yang kurang dari 3.

3.2. Interpretasi dan Validitas

Bagian ini akan membahas mengenai interpretasi dari pernyataan logik dan kebenaran dari argumen logik. Secara umum, suatu ekspresi A dikatakan valid jika A benar untuk semua interpretasi. Ekspresi yang valid dalam kalkulus predikat peranannya sama seperti tautologi dalam kalkulus proposisi. Dalam hal tertentu, implikasi logik dan ekivalensi logik didefinisikan sebagai implikasi yang valid dan ekivalensi yang valid. Seperti tautologi, kita dapat men-generalisasi ekspresi valid dengan suatu skema.

3.2.1. Interpretasi

Suatu interpretasi dari sebuah pernyataan harus berisi informasi yang cukup untuk menentukan apakah pernyataan itu benar atau salah. Misalkan, perhatikan pernyataan “semua pelanggan harus membayar”. Apakah kita dapat menentukan bahwa pernyataan itu benar? Yang jelas kita harus tahu siapa itu yang dimaksud dengan pelanggan; yang berarti butuh suatu semesta pembicaraan. Yang kedua, kita juga harus tahu siapa yang harus membayar dan siapa yang tidak. Ini berarti kita perlu beberapa tipe pemberian nilai untuk predikat “harus membayar”.

Secara formal, suatu interpretasi dari sebuah ekspresi logik mengandung komponen-komponen berikut :

1. Harus ada semesta pembicaraan
2. Untuk setiap individu, harus ada sebuah konstanta individu yang secara khusus menyatakan individu tertentu dan tidak untuk individu yang lain
3. Semua variabel bebas harus dinyatakan dengan sebuah konstanta individu yang unik
4. Harus ada suatu pemberian nilai kebenaran untuk tiap predikat yang digunakan dalam ekspresi, termasuk predikat dengan aritas 0, yang mewakili proposisi

Sekarang kita bahas mengenai kemungkinan interpretasi dari $\forall xP(x)$ dimana P adalah predikat “harus membayar”. Untuk mendapatkan suatu interpretasi, dibutuhkan daftar pelanggan, yang tersedia dalam semesta pembicaraan. Misalkan diasumsikan hanya ada tiga pelanggan yaitu John, Mili dan Smith. Kita singkat namanya menjadi J , M , dan S . Nama-nama ini merupakan konstanta individu. Berikutnya dibutuhkan nilai kebenaran untuk $P(x)$. Misal John dan Mili harus

membayar dan Smith tidak, maka nilai kebenaran untuk $P(x)$ diberikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} P(x = J) &= T \\ P(x = M) &= T \\ P(x = S) &= F \end{aligned}$$

Dari informasi ini, maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan $\forall xP(x)$ adalah pernyataan yang salah. Dalam interpretasi kita, $\forall xP(x)$ akan bernilai benar jika $P(J)$, $P(M)$ dan $P(S)$ semua bernilai benar, tetapi tidak dalam kasus ini. Smith tidak harus membayar, jadi $P(S)$ bernilai salah.

Kita perlu memformulasikan secara umum suatu ekspresi $\forall xP(x)$ dapat bernilai benar. Misalkan kita pilih domain yang terdiri dari n individu yaitu $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, maka $\forall xP(x)$ bernilai benar jika $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$ semuanya bernilai benar. Sehingga dapat kita nyatakan dalam proposisi sebagai berikut :

$$\forall xP(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n) \quad (3.2)$$

Sedangkan untuk menginterpretasikan ekspresi $\exists xP(x)$, dimana akan bernilai benar jika ada sedikitnya satu x bernilai benar. Pada kasus diatas, jelas untuk $\exists xP(x)$ akan bernilai benar, karena ada yang bernilai benar yaitu $P(J)$ dan $P(M)$. Dengan domain $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, maka $\exists xP(x)$ bernilai benar jika $P(a_1)$ benar atau $P(a_2)$ benar , ..., atau $P(a_n)$ benar. Dan dapat dinyatakan dalam proposisi berikut :

$$\exists xP(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n) \quad (3.3)$$

Dari ekivalensi (3.2) dan (3.3) kita dapat membuktikan bahwa ekiavalensi (3.1) valid untuk semua domain himpunan hingga yang diberikan. Kita dapat menggunakan hukum DeMorgan untuk menentukan negasi dari ekivalensi (3.2), seperti di bawah ini.

$$\begin{aligned} \neg \forall xP(x) &\equiv \neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \\ &\equiv \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \\ &\equiv \exists x \neg P(x) \end{aligned}$$

Pemberian nilai dari suatu predikat dengan dua argumen dapat dinyatakan menggunakan sebuah tabel yang baris-barisnya mewakili argumen pertama dan kolom-kolomnya untuk argumen kedua. Misalkan untuk menentukan interpretasi dari pernyataan "Ada seseorang yang mengagumi semua orang" dengan himpunan domain = {John, Mary, Jane}. Predikat dari pernyataan ini adalah $Q(x,y)$ yang menyatakan "x mengagumi y". Nilai kebenaran dari predikat tersebut dapat

dilihat pada tabel 3.3. Dari tabel ini kita dapat melihat bahwa John mengagumi Mary dan Jane, Mary mengagumi John, dan Jane mengagumi Mary dan dirinya sendiri. Sekarang kita rubah pernyataan diatas ke dalam kalkulus predikat. "Ada seseorang" dapat dinyatakan dengan $\exists x$. Maka langkah pertama kita tulis ulang pernyataan tersebut menjadi :

$$\exists x [x \text{ mengagumi semua orang}]$$

Pernyataan " x mengagumi semua orang" dapat dinyatakan sebagai $\forall y Q(x,y)$. Sehingga "Ada seseorang yang mengagumi semua orang" dapat ditulis dalam kalkulus predikat sebagai berikut:

$$\exists x(\forall y Q(x,y)) \equiv \exists x \forall y Q(x,y)$$

Untuk menentukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut, pertama-tama kita harus mendapatkan nilai kebenaran dari $\forall y Q(x,y)$. Dan pernyataan tersebut ternyata bernilai salah untuk semua nilai x . Untuk John, pernyataan tersebut salah karena John tidak mengagumi diri sendiri. Salah juga untuk Mary, karena dia tidak mengagumi dirinya sendiri dan Jane. Bagi Jane, pernyataan itu salah karena Jane tidak mengagumi John. Sehingga $\forall y Q(x,y)$ salah untuk semua nilai x ; Karena tidak ada x yang menyebabkan $\forall y Q(x,y)$ bernilai benar, maka $\exists x \forall y Q(x,y)$ bernilai salah.

	John	Mary	Jane	$\forall y Q(x,y)$	$\exists y Q(x,y)$
John	F	T	T	F	T
Mary	T	F	F	F	T
Jane	F	T	T	F	T
$\forall x Q(x,y)$	F	F	F		
$\exists x Q(x,y)$	T	T	T		

Tabel 3.3. Contoh nilai kebenaran untuk predikat $Q(x,y)$

Perlu dicatat bahwa $\forall y \exists x Q(x,y)$ dan $\exists x \forall y Q(x,y)$ adalah dua proposisi yang berbeda. $\forall y \exists x Q(x,y)$ menyatakan bahwa untuk semua orang ada seseorang yang dikagumi. Untuk melihat interpretasi dari pernyataan ini, pertamakali kita lihat $\exists x Q(x,y)$. Pernyataan ini benar untuk semua x : yaitu benar untuk $x = \text{John}$, $x = \text{Mary}$, dan $x = \text{Jane}$. Ini berarti untuk $\forall x \exists y Q(x,y)$ akan bernilai benar untuk interpretasi ini. Jadi, nilai kebenaran mungkin dapat berubah jika pengukur jumlah universal dan eksistensial saling dipertukarkan.

Meskipun pengukur jumlah universal dan eksistensial tidak dapat dipertukarkan, tetapi untuk sesama pengukur jumlah universal atau sesama pengukur jumlah eksistensial dapat saling dipertukarkan.

$$\forall x \forall y Q(x,y) \equiv \forall y \forall x Q(x,y) \quad (3.4)$$

$$\exists x \exists y Q(x,y) \equiv \exists y \exists x Q(x,y) \quad (3.5)$$

Kedua pernyataan dalam (3.4) akan bernilai benar jika dan hanya jika $Q(x,y) = T$ untuk semua kemungkinan pasangan x dan y . Kita dapat melihat kebenaran pernyataan $\forall x \forall y Q(x,y)$ dengan menggunakan tabel seperti tabel 3.3 diatas. $\forall y Q(x,y)$ benar jika dan hanya jika semua entri dari baris x benar, dan $\forall x \forall y Q(x,y)$ benar jika memenuhi untuk setiap barisnya. Berarti $\forall x \forall y Q(x,y)$ akan bernilai benar jika dan hanya jika semua entri dalam tabel bernilai benar. Sama halnya dengan $\forall x Q(x,y)$ benar jika dan hanya jika semua entri dari kolom y bernilai benar dan $\forall y \forall x Q(x,y)$ benar jika dan hanya jika setiap kolom memenuhi. Maka dari itu $\forall y \forall x Q(x,y)$ bernilai benar jika dan hanya jika semua entri bernilai benar. Dan ini berarti ekivalensi (3.4) valid.

Bukti untuk ekivalensi (3.5) sama. Kedua sisi dari ekivalensi ini benar jika ada suatu pasangan tunggal dari nilai-nilai yang membuat $Q(x,y)$ benar. Sebagai contoh, dalam tabel 3.3, $Q(\text{Mary}, \text{John})$ benar, dan menyebabkan $\exists x \exists y Q(x,y)$ maupun $\exists y \exists x Q(x,y)$ bernilai benar. Jika tidak ada nilai T dalam tabel maka jelas pernyataan di kedua sisi menjadi salah.

Misalkan semesta pembicaraan adalah sama seperti dalam tabel 3.3. dan misalkan tiga orang itu menghadiri pesta kebun dan matahari sedang bersinar. Jika pernyataan "Matahari bersinar" dinotasikan dengan S , kita dapat menyimpulkan bahwa interpretasi S bernilai benar. Tidak peduli jika $x = \text{John}, \text{Mary}$ atau Jane , S bernilai benar, yang membuat $\exists x S$ bernilai benar. Untuk alasan yang sama $\exists x S$ juga bernilai benar. Secara umum, jika R adalah sembarang proposisi, yang berarti bahwa tidak peduli apakah individu yang diperhatikan bernilai benar atau salah, maka $\forall x R$ dan $\exists x R$ keduanya benar jika R benar dan keduanya salah jika R salah. Maka dapat disimpulkan bahwa

$$\forall x R \equiv \exists x R \equiv R \quad (3.6)$$

3.2.2. Validitas

Jika suatu argumen logik valid maka harus menghasilkan kebenaran untuk semua interpretasi. Ini adalah konsep dari *validitas* yang akan didefinisikan berikut :

Definisi 3.6 : Suatu ekspresi dikatakan valid jika ekspresi tersebut benar untuk semua interpretasi. Suatu ekspresi A valid, dinotasikan dengan $\models A$

Semua tautologi adalah ekspresi yang valid. Perbedaan antara tautologi dan ekspresi valid adalah bahwa tautologi tidak mengandung pengukur jumlah atau predikat.

Dalam definisi, suatu ekspresi A tidak valid jika ada satu interpretasi yang membuat A salah dan $\neg A$ benar. Untuk lebih jelasnya, perhatikan definisi berikut :

Definisi 3.7 : Jika B suatu ekspresi, maka interpretasi yang membuat B bernilai T dikatakan **memenuhi B** . Interpretasi yang memenuhi B disebut model B . Jika B mempunyai sebuah model maka B dikatakan **terpenuhi** (*satisfiable*)

Oleh karena itu, suatu ekspresi A tidak valid jika $\neg A$ terpenuhi. Dan juga, jika $\neg A$ mempunyai sebuah model maka A tidak valid.

Definisi 3.8 : Suatu ekspresi B yang tidak mempunyai model dikatakan sebagai *kontradiksi*.

Konsekuensinya, jika A valid maka $\neg A$ merupakan kontradiksi.

Dari catatan mengenai validitas ini menghasilkan suatu definisi implikasi logik dan ekivalensi logik sebagai berikut:

Definisi 3.9 : Misalkan A dan B menyatakan dua ekspresi. A dikatakan ekivalen secara logik dengan B jika $A \Leftrightarrow B$ valid. Dalam hal ini, kita tulis $A \equiv B$. Demikian juga, A dikatakan mengimplikasi B secara logik, atau $A \Rightarrow B$, jika $A \Rightarrow B$ valid.

Sebagaimana dalam kalkulus proposisi, kita dapat menggunakan ekivalensi logik untuk memanipulasi ekspresi, dan dapat menggunakan implikasi logik sebagai dasar untuk argumen yang valid. Seperti dalam kalkulus proposisi, kita tulis $A_1, A_2, \dots, A_n \models C$ jika A_1, A_2, \dots, A_n bersama-sama mengakibatkan C .

Hukum berikut ini akan digunakan untuk tujuan demonstrasi.

$$\forall x(P \Rightarrow Q(x)) \equiv P \Rightarrow \forall xQ(x) \quad (3.7)$$

Disini, P adalah suatu proposisi dan Q adalah predikat. Untuk membuktikan (3.7), aturan cases digunakan. Karena nilai P bisa benar atau salah, ini berarti bahwa berdasarkan (3.7) kita dapat membuktikan validasi dari dua ekivalensi berikut :

$$\forall x(T \Rightarrow Q(x)) \equiv (T \Rightarrow \forall xQ(x)) \quad (3.8)$$

$$\forall x(F \Rightarrow Q(x)) \equiv (F \Rightarrow \forall xQ(x)) \quad (3.9)$$

Kedua ekivalensi diatas valid. Karena $T \Rightarrow Q(x) \equiv Q(x)$ maka

$$\forall x(T \Rightarrow Q(x)) \equiv \forall xQ(x)$$

Demikian juga untuk sisi kanan ekivalensi (3.8) menjadi

$$T \Rightarrow \forall xQ(x) \equiv \forall xQ(x)$$

Dan $\forall x(T \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (T \Rightarrow \forall xQ(x))$ valid. Ekivalensi (3.9) juga valid karena kedua sisinya selalu bernilai benar : $F \Rightarrow Q(x)$ selalu benar, dan demikian juga dengan $F \Rightarrow \forall xQ(x)$. Maka (3.8) valid tidak peduli apakah P benar atau salah.

Pada bab sebelumnya dijelaskan bahwa tautologi dapat dikonversikan kedalam skema dalam arti bahwa tiap variabel logik dapat dibuat untuk menyatakan suatu ekspresi. Jelas, instantiasi dari skema harus konsisten dalam arti bahwa simbol yang sama harus melambangkan ekspresi yang sama. Sebagai contoh, dalam skema $A \vee \neg A$, kita dapat mengganti A dengan sembarang ekspresi yang kedua contoh dari A diinstantiasi ke ekspresi yang sama. Sehingga $(P \vee Q) \vee \neg(P \vee Q)$ juga merupakan tautologi tetapi $(P \vee Q) \vee \neg R$ bukan tautologi.

Ekspresi yang valid dalam kalkulus predikat dapat juga dikonversi ke dalam skema, kecuali perhatian khusus yang harus diberikan kepada variabel terbatas dan variabel bebas. Perhatikan ekivalensi (3.7). Dalam ekspresi ini, P dapat diganti dengan sembarang ekspresi sepanjang ekspresi tersebut tidak mengandung x sebagai variabel bebas, dan penggantian ini tidak berdampak pada validitas. Sebagai contoh, misalkan P mewakili "Matahari bersinar", Q untuk "cuaca bagus" dan H untuk " x bahagia". Maka dari (3.7) terbentuk

$$\forall x((P \wedge Q) \Rightarrow H(x)) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow \forall xH(x)$$

Dengan demikian, jika ini benar untuk semua orang yang jika matahari bersinar dan jika cuaca bagus kemudian mereka senang, kita dapat menyimpulkan bahwa

jika matahari bersinar dan jika cuaca bagus maka semua orang senang. P dalam (3.7) diganti dengan suatu predikat yang mengandung variabel bebas. Misalkan $S(y)$ menyatakan “ y bernyanyi” dan $H(x)$ untuk “ x bahagia” seperti sebelumnya. Maka (3.7) dapat diinstantiasi ke

$$\forall x(S(y) \Rightarrow H(x)) \equiv S(y) \Rightarrow \forall xH(x)$$

Bagaimanapun juga, ekspresi yang menggantikan P dalam (3.7) harus mengandung x sebagai variabel bebas. Untuk melihat kenapa tidak, perhatikan ekivalensi berikut

$$(\forall xS(x) \Rightarrow H(x)) \Leftrightarrow (S(x) \Rightarrow \forall xH(x)) \quad (3.10)$$

Dalam kasus ini, $\forall x(S(x) \Rightarrow H(x))$ berarti “setiap orang yang bernyanyi, bahagia”, sedangkan sisi kanannya berarti “Jika x bernyanyi, maka semua orang bahagia” dan dua pernyataan ini berbeda. Meskipun mungkin benar bahwa setiap orang yang bernyanyi bahagia, dan diwaktu yang sama benar bahwa tidak ada yang bahagia jika x bernyanyi. Dua pernyataan ini berbeda karena variabel x di sebelah kiri merupakan variabel terbatas, tetapi x pertama di sebelah kanan adalah variabel bebas. Dua kemunculan x tersebut merupakan variabel yang berbeda, dan (3.10) tidak selalu merupakan suatu kejadian dari (3.7). Kesimpulannya, jika ada proposisi yang muncul lebih dari satu kali dalam suatu ekspresi valid yang diganti dengan sebuah predikat yang mengandung sebuah variabel bebas, maka harus diperhatikan bahwa variabel ini tidak menjadi variabel terbatas dalam prosesnya. Selain itu, hasilnya tidak selalu valid.

Karena validasi sangat penting, metode untuk menunjukkan bahwa suatu ekspresi valid sangat dibutuhkan. Sayangnya, tidak ada metode yang berhasil dalam kasus ini. Masalah seperti ini dikatakan tak terselesaikan (*undecidable*). Suatu masalah yang tak terselesaikan tidak mempunyai penyelesaian umum dalam beberapa hal dimana tidak ada metode yang secara jelas menyediakan jawaban untuk permasalahan ini. Jika suatu permasalahan tak terselesaikan, kita dapat melihatnya sebagai kasus khusus atau dapat diselesaikan dengan suatu metode yang kadang tidak berhasil untuk mendapatkan jawabannya. Salah satu metode untuk membuktikan bahwa suatu ekspresi valid adalah mencoba untuk menunjukkan bahwa negasi dari ekspresi itu merupakan kontradiksi. Tetapi sebelum itu kita akan membahas suatu metode untuk membuktikan bahwa sebuah ekspresi itu tidak valid.

3.2.3. Ekspresi Tidak Valid (*Invalid Expression*)

Suatu ekspresi A dikatakan valid jika dan hanya jika tidak ada suatu interpretasi yang menyebabkan A bernilai salah (F). Untuk membuktikan bahwa ekspresi A

invalid, kita cukup memberikan satu contoh jawaban; yang memberikan satu interpretasi untuk A yang bernilai salah. Atau cukup menemukan satu model tunggal untuk $\neg A$. Dalam hal ini, ketika A berbentuk $B \Rightarrow C$, $\neg A$ bernilai benar jika dan hanya jika B benar saat C salah. Maka dari itu, untuk membuktikan bahwa suatu kondisional tidak valid, cukup menemukan sebuah model yang membuat antecedent benar dan konsekuennya salah. Untuk menunjukkan bagaimana mendapatkan sebuah model, perhatikan ekspresi berikut yang ternyata tidak valid.

$$\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x) \quad (3.11)$$

Jika $P(x)$ benar untuk sembarang x , jelas tidak dapat memberikan konklusi bahwa $P(x)$ benar untuk semua x . Misalkan, jika sebuah program berjalan untuk beberapa input data, maka kita tidak dapat menyimpulkan bahwa program itu berjalan untuk semua kemungkinan input data yang dimasukkan.

Untuk membuktikan bahwa (3.11) tidak valid, kita harus mendapatkan sebuah model yang membuat antecedent $\exists xP(x)$ benar dan konsekuen $\forall xP(x)$ salah. Dengan kata lain, kita harus menemukan model yang seperti di bawah ini :

$$\exists xP(x) \wedge \neg \forall xP(x) \quad (3.12)$$

Kemudian kita pilih suatu interpretasi dengan dua individu a dan b dan menetapkan $P(a)=T$ dan $P(b) = F$. Kemudian ada sebuah nilai x , dimana untuk $x=a$, sehingga $P(x)$ benar, yang berarti $\exists xP(x) = T$. Dan $\forall xP(x)$ akan bernilai salah.

Jika ada suatu kalkulus predikat bernilai benar untuk semua x maka ini juga benar untuk $x=y$. Kemudian kita dapat mengasumsikan ekspresi berikut valid.

$$\forall xA \Rightarrow S_y^x A$$

Bagaimanapun juga, jika A mengandung y sebagai suatu variabel terbatas, maka ini tidak selalu bernilai benar karena berpotensi terjadi *clash*. Ekspresi berikut tidak valid

$$\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y P(y,y) \quad (3.13)$$

Dalam hal ini, variabel x dikonversi ke y , dimana y adalah variabel terbatas dari ruang lingkup $\exists y$ dan ini illegal. Dengan demikian (3.13) tidak valid. Untuk menunjukkan ini, kita harus membuktikan bahwa ada sebuah model yang membuat $\forall x \exists y P(x,y)$ benar dan $\exists y P(y,y)$ salah. Dengan kata lain, kita harus menemukan model untuk

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \neg \exists y P(y,y) \quad (3.14)$$

Misalkan domainnya dua individu a dan b , dan pemberian nilai dari $P(x,y)$ yang diberikan oleh tabel berikut :

	a	b
a	F	T
b	T	F

Disini terlihat bahwa $P(a,a)$ dan $P(b,b)$ keduanya bernilai salah, yang menyebabkan $\exists y P(y,y)$ bernilai salah. Di lain pihak, $\exists y P(a,y)$ dan $\exists y P(b,y)$ keduanya bernilai benar, yang berarti bahwa $\forall x \exists y P(x,y)$ benar. Ini menjadi interpretasi sebuah model untuk (3.14)

Untuk menunjukkan bahwa suatu ekspresi tidak valid, kita juga dapat menggunakan ekspresi tersebut dan mendapatkan suatu kemustahilan darinya. Sebagai contoh, pada kasus (3.13) kita dapat menetapkan $P(x,y)$ sebagai "Ibu dari x adalah y ". $\forall x \exists y P(x,y)$ menjadi "semua orang mempunyai seorang ibu", yang normalny bernilai benar, dan $\exists y P(y,y)$ untuk " y adalah ibu dari dirinya sendiri" akan bernilai salah.

Terakhir, kita akan menunjukkan bahwa ekspresi berikut tidak valid

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \quad (3.15)$$

Kita tentukan model yang membuat konsekuen salah dan antecedent-nya benar. Interpretasi tersebut menggunakan sebuah domain yang terdiri dari individu a dan b . Pemberian nilai diberikan oleh tabel berikut :

x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
a	T	F	T
b	F	T	T

Dari tabel diatas bahwa interpretasi $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ adalah benar, sedangkan untuk $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ bernilai salah. Ini menyebabkan pernyataan (3.15) bernilai salah. $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ menyatakan bahwa untuk semua x , $P(x)$ bisa benar atau salah. Sedangkan $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ menyatakan $P(x)$ benar untuk semua x , atau $Q(x)$ benar untuk semua x .

3.2.4. Pembuktian Validitas

Masalah pembuktian apakah suatu ekspresi valid atau tidak merupakan permasalahan yang tidak terpecahkan. Meskipun demikian kita perlu mengetahui kasus-kasus yang mempunyai bukti langsung. Contohnya, semua tautologi adalah valid. Sehingga, setiap ekspresi yang dapat direduksi menjadi tautologi secara otomatis valid. Ekspresi lain valid dengan definisi. Sebagai contoh $\forall xP(x)$ harus menyebabkan $P(t)$ benar untuk semua t . Jika terdapat pembuktian yang sederhana, dapat kita gunakan untuk membuktikan ekspresi yang lain. Sehingga meskipun tidak ada metode pembuktian yang umum, kita tetap bisa menyatakan apakah suatu ekspresi valid atau tidak. Ada juga metode yang bekerja untuk sejumlah besar kasus. Metode yang banyak digunakan berdasarkan pada kenyataan bahwa jika ekspresi A valid maka $\neg A$ harusnya kontradiksi.

Contoh 3.3 : Tunjukkan bahwa ekspresi berikut valid :

$$\forall xP(x) \Rightarrow \neg \forall x \neg P(x) \quad (3.16)$$

Penyelesaian : Pertama kali kita harus membuktikan bahwa tidak ada suatu model yang membuat $\forall xP(x)$ benar, sehingga menyebabkan negasi dari $\forall x \neg P(x)$ salah. Dengan kata lain kita harus menunjukkan tidak ada sebuah model yang membuat $\forall xP(x)$ dan $\forall x \neg P(x)$ keduanya bernilai benar. Ini mudah. Tidak mungkin bahwa $P(x)$ benar untuk semua x dan disaat yang sama juga bernilai salah untuk semua x . Ini adalah kontradiksi yang membuat pernyataan diatas valid.

Catatan, meski ekspresi (3.16) valid, tetapi konversenya tidak valid. Dengan kata lain ekspresi berikut tidak valid

$$\neg \forall x \neg P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$$

Misalkan $P(x)$ adalah “ x bekerja”, maka $\neg \forall x \neg P(x)$ berarti “tidak semua orang menganggur” dan $\forall x P(x)$ berarti “semua orang bekerja”. Kedua pernyataan itu tidak sama. Pernyataan yang sebelah kiri dapat diartikan bahwa ada orang yang tidak bekerja, sedangkan yang satunya jelas menyatakan bahwa semua orang punya pekerjaan.

Contoh 3.4 : Tunjukkan bahwa pernyataan berikut valid

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \quad (3.17)$$

Penyelesaian : Untuk membuktikan bahwa $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ secara logik menyebabkan $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, kita harus menunjukkan bahwa tidak ada interpretasi yang membuat $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ benar yang membuat $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ salah. Untuk itu, asumsikan bahwa $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ salah. Ini berarti bahwa $\neg \forall x(P(x) \vee Q(x))$ benar, atau, sama dengan $\exists x \neg (P(x) \vee Q(x))$ benar. Sehingga seharusnya ada sedikitnya satu individu yang

membuat $\exists x \neg(P(x) \vee Q(x))$ benar. Jika individu itu disebut a , maka $\neg(P(a) \vee Q(a))$ benar, dan ini hanya terjadi jika $P(a)$ dan $Q(a)$ keduanya salah. Jika $P(a)$ dan $Q(a)$ keduanya salah, maka $\forall x P(x)$ dan $\forall x Q(x)$ keduanya akan bernilai salah. Dan ini menyebabkan $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ salah. Suatu kontradiksi terpenuhi dan (3.17) valid.

Latihan Soal 3.2

- Sebuah domain terdiri dari individu a, b , dan c . Untuk tiap individu ini, suatu predikat $Q(x, y)$ didefinisikan dan nilai kebenarannya diberikan oleh tabel berikut :

	a	b	c
a	T	F	T
b	F	T	T
c	F	T	T

Tentukan $\forall x \exists y Q(x, y)$, $\forall y Q(y, b)$, dan $\forall y Q(y, y)$

- Untuk domain seperti yang didefinisikan di soal nomor 1, tentukan nilai kebenaran untuk $\exists x \neg Q(a, x)$, $\forall y Q(b, y)$, dan $\forall y Q(y, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y)$
- Himpunan semesta = {John, Mary, Jane}. Ketiga orang itu adalah mahasiswa dan tidak ada yang kaya. John pria, Mary dan Jane wanita. Misalkan M menyatakan mahasiswa, P untuk pria, W wanita dan K untuk kaya.
 - Berikan pemberian nilai untuk M, P, W, K
 - Tentukan $\forall x M(x)$, $\forall x W(x) \vee \forall x P(x)$, $\forall x (P(x) \vee W(x))$, $\exists x K(x)$ dan $\exists x (W(x) \Rightarrow K(x))$
 - Misalkan $R = T$ dan $S = F$. Tentukan $\forall x R$, $\forall x S$, $\exists x (R \wedge W(x))$, $\exists x (R \vee W(x))$ dan $\exists x (S \vee W(x))$.
- Apakah $P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$ valid ? Berikan alasan.
- Diketahui himpunan semesta = $\{a, b, c\}$ dan sebuah predikat dua-tempat P , dimana $P(x, x)$ benar untuk semua kemungkinan nilai x , $P(a, c) = T$. Selain itu $P(x, y)$ salah. Tentukan nilai kebenaran dari
 - $P(a, b) \wedge P(a, c)$
 - $P(c, b) \vee P(a, c)$
 - $P(b, b) \wedge P(c, c)$
 - $P(c, a) \Rightarrow P(c, c)$
- Buatlah sebuah model untuk $(P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge \neg Q(y) \wedge P(y)$.
- Tunjukkan bahwa $(P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge (Q(y) \Rightarrow R(z)) \Rightarrow (P(z) \Rightarrow Q(z))$ tidak valid.

3.3. Derivasi

Pada subbab ini kita akan membahas derivasi atau penurunan dalam kalkulus predikat. Secara umum, ada aturan yang diperlukan untuk memasukkan dan menghilangkan pengukur universal dan eksistensial. Disini juga akan dijelaskan konsep baru yang disebut dengan unifikasi (unification).

3.3.1. Instantiasi Universal

Dari $\forall xP(x)$, kita dapat mendapatkan $P(t)$ untuk sembarang t . Sebagai contoh, jika $P(x)$ menyatakan “ x tidur” maka $\forall xP(x)$ berarti “semua orang tidur” dan bentuk dapat digunakan untuk mendapatkan “John tidur”. Secara formal, jika x menyatakan sebuah variabel, t suatu konstanta atau term, dan A menyatakan suatu ekspresi, maka ekspresi berikut valid.

$$\forall xA \Rightarrow S_y^x A \tag{3.18}$$

Validitas dari ekspresi ini diperoleh dari definisi $\forall x$: jika A benar untuk semua x , maka untuk $x=t$ akan bernilai benar. Yang perlu diperhatikan bahwa t tidak boleh suatu variabel terbatas dari suatu pengukur jumlah yang ada. Implikasi logik yang diberikan pada (3.18) dapat dirubah dalam suatu aturan pengambilan kesimpulan (*rule of inference*) sebagai berikut :

$$\begin{array}{ccc} \forall xA & & \forall xP(x) \\ \text{-----} & \text{atau} & \text{-----} \\ S_y^x A & & P(y) \end{array}$$

Aturan pengambilan kesimpulan ini disebut dengan instantiasi universal (*universal instantiation*) dan disingkat dengan UI. Contohnya,

$$\begin{array}{c} \forall x[kucing(x) \Rightarrow punyaekor(x)] \\ \text{-----} \\ kucing(Tom) \Rightarrow punyaekor(Tom) \end{array}$$

Sekarang kita akan melakukan derivasi. Yang pertama diberikan premis-premis sebagai berikut :

Semua orang akan mati
Socrates orang

Dari premis ini akan dibuktikan bahwa

Socrates akan mati

Untuk melakukan derivasi, kita misalkan $O(x)$ untuk “ x adalah orang” dan $M(x)$ untuk “ x akan mati”. Dimisalkan juga S adalah Socrates. Proses derivasi dapat dilihat berikut ini :

Buktikan : $\forall x(O(x) \Rightarrow M(x)), O(S) \vdash M(S)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall x(O(x) \Rightarrow M(x))$	Premis	Semua orang akan mati
3. $O(S)$	Premis	Socrates orang
3. $O(S) \Rightarrow M(S)$	1, UI	Jika Socrates orang, maka dia akan mati
4. $M(S)$	2,3,MP	Kesimpulannya Socrates akan mati

Contoh kedua kita akan membuktikan bahwa Paul anak laki-laki John dengan menggunakan premis-premis :

John adalah ayah Paul

Paul bukan anak perempuan John

Orang yang punya ayah John, seharusnya anak laki-laki atau anak perempuan John

Dengan menggunakan beberapa simbol dan singkatan berikut :

$A(x,y)$: x ayah dari y

$L(x,y)$: x anak laki-laki y

$W(x,y)$: x anak perempuan y

Dan juga J untuk John, P untuk Paul. Kita dapat menyatakan argumen diatas dalam bentuk proposisi sebagai berikut :

$$\begin{array}{l}
 A(J,P) \\
 \neg W(P,J) \\
 \forall x(A(J,x) \Rightarrow L(x,J) \vee W(x,J)) \\
 \hline
 L(P,J)
 \end{array}$$

Dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan *Modus Ponens* (MP) dan *Disjunctive Syllogism* (DS), argumen diatas dapat dibuktikan sebagai berikut

Buktikan : $\forall x(A(J,x) \Rightarrow L(x,J) \vee W(x,J)), A(J,P), \neg W(P,J) \vdash L(P,J)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall x(A(J,x) \Rightarrow L(x,J) \vee W(x,J))$	premis	Orang yang punya ayah John, bisa anak laki-laki atau anak perempuan John
3. $A(J,P)$	premis	John adalah ayah Paul
3. $\neg W(P,J)$	premis	Paul bukan anak perempuan John
4. $A(J,P) \Rightarrow L(P,J) \vee W(P,J)$	1,UI	Jika John ayah Paul maka Paul anak laki-laki John atau anak perempuan John
5. $L(P,J) \vee W(P,J)$	2,4,MP	Paul anak laki-laki John atau Paul anak perempuan John
6. $L(P,J)$	3,5,DS	Maka Paul adalah anak laki-laki John

3.3.2. Generalisasi Universal (*Universal Generalization*)

Jika A sembarang ekspresi dan jika x adalah variabel yang tidak muncul sebagai variabel bebas di beberapa premis, maka

$$\frac{A}{\forall xA}$$

Aturan penarikan kesimpulan ini disebut Universal Generalization atau disingkat UG. Karena x menjadi variabel terbatas dalam proses ini, maka dapat juga dinyatakan generalisasi universal terhadap x . Jika kita men-generalisasi x , maka x tidak boleh muncul sebagai variabel bebas. Jika x muncul sebagai variabel bebas, maka x selalu menyatakan individu yang sama dan nilainya tetap. Sebagai contoh, jika $P(x)$ ada di suatu premis, maka $P(x)$ bernilai benar hanya untuk x dan tidak harus benar untuk individu yang lain. Jika x tetap, kita tidak dapat mengeneralisasi x . Generalisasi dari satu individu tertentu ke seluruh populasi tidak benar. Jika, di lain pihak, x tidak muncul di suatu premis atau jika x terbatas di semua premis, maka x diasumsikan mewakili semua individu, dan generalisasi universal dapat diterapkan tanpa pembatasan-pembatasan.

Perhatikan masalah berikut dimana himpunan semesta terdiri dari sekumpulan mahasiswa ilmu komputer. Dan semua mahasiswa ilmu komputer senang dengan pemrograman. Derivasi ini akan membuktikan bahwa semua orang yang ada dalam domain menyukai pemrograman. Jika $P(x)$ menyatakan “ x adalah mahasiswa ilmu komputer” dan $Q(x)$ untuk “ x suka pemrograman”, argumennya menjadi :

$$\begin{array}{l}
 \forall xP(x) \\
 \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\
 \hline
 \forall xQ(x)
 \end{array}$$

Bukti dari argumen tersebut dapat dilihat sebagai berikut :

Buktikan : $\forall xP(x), \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash \forall xQ(x)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall xP(x)$	premis	Semua orang adalah mahasiswa ilmu komp
3. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$	premis	Semua mahasiswa ilmu komputer suka pemrograman
3. $P(x)$	1, UI	x adalah mahasiswa komputer
4. $P(x) \Rightarrow Q(x)$	2, UI	Jika x mahasiswa komputer maka x suka pemrograman
5. $Q(x)$	3,4,MP	x suka pemrograman
6. $\forall xQ(x)$	5,UG	Maka semua menyukai pemrograman

Contoh kedua, kita akan mendapatkan $\forall y\forall xP(x,y)$ dari $\forall x\forall yP(x,y)$, yang dapat membuktikan bahwa pengukur jumlah universal dapat saling dipertukarkan.

Buktikan : $\forall x\forall yP(x,y) \vdash \forall y\forall xP(x,y)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall x\forall yP(x,y)$	premis	
3. $\forall yP(x,y)$	1, UI	
3. $P(x,y)$	2, UI	
4. $\forall xP(x,y)$	3, UG	
5. $\forall y\forall xP(x,y)$	4, UG	

Contoh ketiga, dengan menggunakan UG kita akan membuktikan bahwa variabel x dalam pengukur jumlah universal dapat ditukar dengan variabel y .

Buktikan : $\forall xP(x) \vdash \forall yP(y)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall xP(x)$	premis	
3. $P(y)$	1, UI	
3. $\forall yP(y)$	2, UG	

3.3.3. Teorema Deduksi Dan Generalisasi Universal

Dalam teoreman deduksi, kita mengasumsikan B , membuktikan C , menggunakan B sebagai premis dan menyimpulkan bahwa $B \Rightarrow C$ dan B diabaikan. Yang menjadi pertanyaan sekarang adalah bagaimana memperlakukan variabel bebas yang terjadi dalam B . Pertama, saat B digunakan sebagai asumsi, selaman B belum dihilangkan, B harus diperlakukan seperti premis-premis yang lain. Secara umum, jika B mengandung x sebagai variabel bebas, maka kita tidak boleh mengeneralisasi terhadap x . Sekali B diabaikan, dia tidak mempengaruhi apapun atau status dari beberapa variabel. Sehingga jika x bukan variabel bebas, kita dapat mengeneralisasi secara universal terhadap x bahkan jika x muncul di B .

Contoh teorema deduksi sebagai berikut. Misalkan $S(x)$ menyatakan “ x belajar” dan $P(x)$ untuk “ x lulus”. Premisnya adalah semua orang yang belajar akan lulus. Kita akan membuktikan bahwa semua orang yang tidak lulus, tidak belajar, seperti terlihat dibawah ini.

Buktikan : $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x)) \vdash \forall x(\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x))$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$	premis	Semua yang belajar akan lulus
3. $S(x) \Rightarrow P(x)$	1, UI	Jika x belajar maka x lulus
3. $\neg P(x)$	Asumsi	diasumsi x tidak lulus
4. $\neg S(x)$	2,3,MT	Maka x tidak belajar
5. $\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x)$	DT	Konklusi dengan teorema deduksi bahwa jika x tidak lulus maka x tidak belajar
6. $\forall x(\neg P(x) \Rightarrow \neg S(x))$	5,UG	Secara umum, semua yang tidak lulus tidak belajar

3.3.4. Menghilangkan Pengukur Jumlah Universal

Dalam matematika, pengukur jumlah universal sering diabaikan. Sebagai contoh, dalam pernyataan $x+y = y+x$, meskipun x dan y berlaku untuk semua nilai yang ada di domainnya, tetapi tidak dicantumkan secara eksplisit. Yang menjadi masalah, jika pernyataan seperti ini digunakan sebagai premis, menurut aturan kita, variabel-variabel bebas yang muncul dalam suatu premis adalah tetap dalam arti bahwa pembuktian dibatasi pada suatu dan individu yang sama. Untuk mengatasi kesulitan ini, kita tetapkan variabel tertentu dalam premis dan secara eksplisit menentukan bahwa variabel ini tidak tetap. Semua variabel yang tidak tetap ini disebut **variabel sejati** (*true variable*). Sebuah variabel mungkin akan digeneralisasi secara universal jika dan hanya jika variabel ini merupakan variabel sejati. Jika suatu variabel muncul dalam premis, maka diasumsikan variabel itu tetap, kecuali jika secara eksplisit ditentukan bahwa variabel itu adalah variabel sejati.

Dengan menggunakan variabel sejati, kita dapat mengabaikan pengukur jumlah universal dan ini berarti akan menyederhanakan pembuktian. Variabel sejati juga dapat diinstantiasi untuk beberapa kondisi.

Selama ini, instantiasi selalu dilambangkan dengan simbol S seperti S_y^x . Mulai sekarang kita akan menggunakan notasi $x := y$ untuk menyatakan bahwa x diganti dengan y .

Contoh 3.5 : Misalkan $P(x,y,z) : x+y=z$, dan premis-premisnya adalah $P(x,0,x)$ dan $P(x,y,z) \Rightarrow P(y,x,z)$, dimana x,y,z adalah variabel sejati. Buktikan bahwa $0+x = x$.

Penyelesaian : $0+x=x$ dapat diwakili dengan $P(0,x,x)$. Berikut ini adalah derivasi untuk mendapatkan $P(0,x,x)$

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $P(x,y,z) \Rightarrow P(y,x,z)$ | Premis : $x+y=z \Rightarrow y+x = z$, dan x,y,z variabel sejati |
| 3. $P(x,0,x)$ | Premis : $x + 0 = x$, dan x variabel sejati |
| 3. $P(x,0,x) \Rightarrow P(0,x,x)$ | 1, dengan $x := x, y := 0, z:=x$ (sama seperti UI) |
| 4. $P(0,x,x)$ | 2,3, modus ponens : $0 + x = x$ |

Perlu diperhatikan bahwa pada premis-premis di baris satu dan dua variabel sejati dijelaskan secara eksplisit.

Semua variabel sejati adalah variabel lokal pada baris dimana mereka muncul. Dengan demikian, jika variabel sejati x muncul pada dua baris yang berbeda, maka kedua variabel ini sebenarnya dua buah variabel yang berbeda. Seperti pada contoh diatas, x pada baris 1 dan x pada baris 2 adalah dua variabel yang berbeda. Saat melakukan pembuktian, kita harus menetapkan beberapa tipe dari hubungan antara variabel-variabel tersebut dan hubungan ini melalui instantiasi. Dan tentu saja, instantiasi tidak boleh dilakukan sembarangan. Artinya, kita harus melakukan instantiasi dengan suatu cara yang hasilnya dibuat melalui konklusi yang diinginkan. Ada beberapa prinsip umum yang membantu menyelesaikan masalah ini, dan salah satunya disebut dengan **unifikasi** (*unification*).

Definisi 3.10 : Dua ekspresi dikatakan menyatu (*unify*) jika ada instantiasi legal yang membuat ekspresi tersebut identik. Cara untuk menyatukan disebut **unifikasi** (*unification*). Instantiasi yang menyatukan ekspresi-ekspresi tersebut disebut **penyatu** (*unifier*).

Contoh misalkan $Q(a,y,z)$ dan $Q(y,b,c)$ merupakan ekspresi yang muncul pada baris yang berbeda. Kita dapat menunjukkan bahwa dua ekspresi tersebut menyatu.

Disini a, b, c adalah variabel sejati. Karena y dalam $Q(a, y, z)$ adalah variabel yang berbeda dengan y di $Q(y, b, c)$, kita dapat mengganti nama variabel y yang kedua dengan y_1 . Ini berarti kita harus menyatukan $Q(a, y, z)$ dengan $Q(y_1, b, c)$.

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| 1. $Q(a, y, z)$ | Premis |
| 3. $Q(y_1, b, c)$ | Premis |
| 3. $Q(a, b, c)$ | 1, UI dengan $y:=b, z:=c$ |
| 4. $Q(a, b, c)$ | 2, UI dengan $y_1:=a$ |

Disini terlihat kedua hasil instantiasi identik. Maka $Q(a, y, z)$ dan $Q(y, b, c)$ unify, dengan penyatunya adalah $a = y_1$ dan $b = y$.

Ada beberapa penyatu. Misalkan jika a dan b konstanta, maka $R(a, x)$ dan $R(y, z)$ mempunyai penyatu $y = a, z = x$, yang menghasilkan $R(a, x)$. Juga ada penyatu $y=a, x=b, z=b$ yang menghasilkan $R(a, b)$. Sebenarnya $R(a, b)$ adalah hasil dari $R(a, x)$ dan penyatu $y=a, x=b, z=b$ lebih kurang umum dibanding $y=a, z=x$.

Secara umum, unifikasi dapat dibentuk dengan suatu cara yang menggunakan beberapa aturan pengambilan keputusan seperti pada contoh diatas.

Contoh 3.6 : Jika x adalah ibu dari y dan jika z adalah saudara perempuan x maka z adalah bibi dari y . Misalkan ibu dari Ben adalah Jane dan Lisa adalah saudara perempuan Jane. Buktikan bahwa Lisa adalah bibi dari Ben.

Penyelesaian : Misalkan

- ibu(x, y) : " x ibu dari y "
- saudara(x, y) : " x saudara y "
- bibi(x, y) : " x bibi dari y "

maka kita dapat menetapkan premis-premis sebagai berikut :

1. ibu(x, y) \wedge saudara(z, x) \Rightarrow bibi(z, y)
2. ibu(Jane, Ben)
3. saudara(Lisa, Jane)

Dengan mengkombinasikan 2 dan 3 kita akan mendapatkan :

4. ibu(Jane, Ben) \wedge saudara(Lisa, Jane)

Ekspresi ini dapat disatukan dengan ibu(x, y) \wedge saudara(z, x) dengan $x:=Jane, y:=Ben$ dan $z:=Lisa$. Sehingga diperoleh

5. ibu(Jane, Ben) \wedge saudara(Lisa, Jane) \Rightarrow bibi(Lisa, Ben)

Dengan menggunakan modus ponens untuk baris 4,5 diperoleh konklusi

6. bibi(Lisa,Ben)

3.3.5. Existential Generalization

Jika bibi Cordelia berumur lebih dari 100 tahu, maka ada seseorang yang berumur lebih dari 100 tahun. Jika ada t untuk $P(t)$, maka kita dapat menyimpulkan bahwa ada x yang memenuhi $P(x)$. $P(t)$ secara logik menyebabkan $\exists xP(x)$. Secara umum, $\exists xA$ dapat diturunkan dari $S_t^x A$ dimana t adalah sembarang nilai. Ini menghasilkan aturan pengambilan kesimpulan :

$$\begin{array}{c} S_t^x A \\ \text{-----} \\ \exists xA \end{array}$$

Aturan ini disebut dengan *existential generalization*, dan disingkat EG dalam pembuktian formal.

Contoh berikut ini akan menunjukkan bagaimana menggunakan EG dalam suatu pembuktian formal. Premis-premisnya adalah sebagai berikut :

1. Semua orang yang menang satu miliar akan kaya
2. Santi menang satu miliar

Kita akan membuktikan bahwa dua pernyataan tersebut secara logik menyebabkan

3. Ada orang yang kaya

Misalkan $M(x)$ menyatakan “ x menang satu miliar” dan $K(x)$ untuk “ x kaya” serta S untuk Santi, maka pembuktian formalnya adalah sebagai berikut

Buktikan : $\forall x(M(x) \Rightarrow K(x)), M(S) \vdash \exists xK(x)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\forall x(M(x) \Rightarrow K(x))$	premis	Semua yang menang 1 miliar akan kaya
3. $M(S) \Rightarrow K(S)$	1, UI	Jika Santi menang 1 miliar maka dia kaya
3. $M(S)$	premis	Santi menang satu miliar
4. $K(S)$	2,3,MP	Maka Santi kaya
5. $\exists xK(x)$	4, EG	Ada orang yang kaya, yaitu Santi

Contoh yang berikutnya akan membuktikan bahwa $\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$. Pertamata-tama kita akan menunjukkan bahwa $\neg\exists xP(x) \vdash \forall x\neg P(x)$ dan selanjutnya pada subbab berikutnya dibuktikan juga bahwa $\forall x\neg P(x) \vdash \neg\exists xP(x)$. Pembuktian disini akan menggunakan aturan *Modus Tollens* (MT), *Universal Generalization*(UG), *Existential Generalization* (EG) dan teorema deduksi (TD).

Buktikan : $\neg\exists xP(x) \vdash \forall x\neg P(x)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\neg\exists xP(x)$	Premis	Tidak ada x yang memenuhi $P(x)$
3. $P(x)$	Asumsi	Asumsikan $P(x)$
3. $\exists xP(x)$	2, EG	Maka ada x yang memenuhi $P(x)$
4. $P(x) \Rightarrow \exists xP(x)$	TD	Teorema deduksi
5. $\neg P(x)$	1,4, MT	
6. $\forall x\neg P(x)$	5, UG	

3.3.6. Existential Instantiation

Jika $\exists xA$ benar maka harus ada suatu t yang memenuhi A ; Yang berarti $S_t^x A$ harus bernilai benar untuk beberapa t . Sebagai contoh, jika $P(x)$ menyatakan “ x sedang berlari” maka $\exists xP(x)$ berarti bahwa $S_t^x P(x) = P(t)$ yang seharusnya benar untuk term t . Permasalahannya adalah kita tidak tahu untuk term yang mana. Jika kita tahu seseorang sedang berlari, kita tetap tidak tahu apakah orang itu Paul, ataukah Jim, atau bahkan orang lain yang berlari. Pada suatu pembuktian, pertanyaan ini masih tetap terbuka untuk menentukan siapa yang sedang berlari. Untuk itu kita perlu suatu variabel baru b , yang dipilih untuk menyatakan individu yang tidak diketahui itu. Sehingga aturan penarikan kesimpulannya adalah sebagai berikut :

$$\frac{\exists xA}{S_b^x A}$$

Aturan ini disebut Existential Instantiation dan dalam derivasi disingkat EI.

Variabel b yang digunakan dalam EI tidak harus sebuah variabel bebas. Contohnya, misalkan untuk dua pernyataan berikut “Ada orang yang berumur lebih dari 100 tahun” dan “ada orang yang sedang berlari”, kita tidak harus menggunakan variabel b yang sama untuk EI pada kedua kasus tersebut. Selain itu, kita dapat menyimpulkan bahwa b berumur lebih dari 100 tahun dan sedang berlari. Kita juga

tidak dapat menggunakan variabel yang muncul bebas di beberapa premis. Dengan demikian EI tidak harus menunjukkan ada variabel yang muncul sebagai variabel bebas dalam proses derivasi. Lebih dari pada itu, variabel yang ditunjukkan tetap dalam arti bahwa kita tidak dapat menggunakan UG terhadap variabel ini. Sebagai contoh, jika b sedang berlari, maka kita tidak dapat menggunakan UG untuk menyimpulkan bahwa semua orang sedang berlari. Dan sebuah variabel dengan suatu nilai yang tidak diketahui tidak boleh muncul sebagai konklusi dan karena ada variabel yang ditunjukkan oleh EI tidak diketahui, ini juga tidak boleh muncul dalam konklusi.

Contoh, misalkan ada orang yang menang 1 miliar, dan kita ingin membuktikan bahwa ada orang yang kaya. Maka premis-premisnya adalah sebagai berikut :

1. *Seseorang menang 1 miliar*
2. *Semua orang yang menang 1 miliar akan kaya*

Kita ingin menunjukkan bahwa kedua pernyataan diatas secara logik akan menyebabkan :

3. *Ada orang yang kaya*

Bukti formal selengkapnya dapat dilihat berikut ini :

Buktikan : $\exists xM(x), \forall x(M(x) \Rightarrow K(x)) \vdash \exists xK(x)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\exists xM(x)$	premis	Ada yang menang 1 miliar
3. $M(b)$	1, EI	b menang 1 miliar
3. $\forall x(M(x) \Rightarrow K(x))$	Premis	Semua yang menang 1 Miliar akan kaya
4. $M(b) \Rightarrow K(b)$	3,UI	Jika b menang maka b kaya
5. $K(b)$	2,4,MP	b kaya
5. $\exists xK(x)$	4, EG	ada orang yang kaya, yaitu b

Perlu diperhatikan bahwa kita tidak boleh mendapatkan 3 dan 4 sebelum 1 dan 2 diperoleh; artinya tidak boleh menggunakan instantiasi universal sebelum instantiasi eksistensial. Ini dikarenakan, sekali didapat $M(b) \Rightarrow K(b)$, b bukan lagi variabel baru, dan tidak boleh digunakan dalam instantiasi eksistensial. Untuk itulah akan lebih baik jika kita gunakan instantiasi eksistensial terlebih dahulu.

Pada contoh yang kedua kita akan membuktikan bahwa $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists x P(x)$ yang merupakan lanjutan pembuktian pada subbab 3.3.5 sebelumnya, yang ingin membuktikan bahwa $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$. Sebagaimana telah dijelaskan pada subbab 1.6.5, bahwa untuk membuktikan suatu negasi, kita dapat menggunakan pembuktian tak langsung (indirect proof) yaitu : untuk membuktikan $\neg A$, asumsikan A dan dapatkan suatu kontradiksi. Karena kita ingin membuktikan $\neg \exists x P(x)$, maka kita gunakan asumsi $\exists x P(x)$. Selengkapnya dapat dilihat sebagai berikut :

Buktikan : $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $\exists x P(x)$	asumsi	Asumsi ini akan dibuang nantinya
3. $P(b)$	1, EI	$P(x)$ benar untuk $x = b$
3. $\forall x \neg P(x)$	Premis	$P(x)$ salah untuk semua x
4. $\neg P(b)$	3, UI	$P(b)$ salah
5. $\neg P(b) \wedge P(b)$	2,4, C	Kita dapatkan kontradiksi yang diinginkan, yang menyebabkan asumsi tersebut salah
6. $\neg \exists x P(x)$	5, IP	Karena 5 adalah kontradiksi, asumsi salah dan dapat dihilangkan diganti dengan negasinya yang pasti bernilai benar

Latihan Soal 3.3

1. Jika diberikan P dan $\forall x(P \Rightarrow Q(x))$, buatlah sebuah derivasi formal untuk $\forall x Q(x)$. Gunakan aturan penarikan kesimpulan UI, UG dan MP
2. Jika diberikan $\forall x \neg Q(x)$ dan $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, berikan bukti formal untuk $\forall x \neg P(x)$. Gunakan aturan UI, UG dan MT sebagai aturan penarikan kesimpulan
3. Berikan derivasi formal untuk menunjukkan $\exists x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$. Gunakan EI dan EG sebagai aturan penarikan kesimpulannya.
4. Berikan derivasi formal untuk menunjukkan $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$
5. Misalkan $C(x,y)$ menyatakan “ x anak dari y ”, dan $P(x,y)$ untuk “ y orang tua x ”. Dan jelas bahwa $\forall x \forall y (C(x,y) \Rightarrow P(y,x))$. Berikan derivasi formal untuk membuktikan bahwa jika Peter anak Jane, maka Jane adalah orang tua Peter. Gunakan variabel sejati yang dapat dipakai untuk menghilangkan pengukur jumlah sebelum derivasi dilakukan.

6. Misalkan $L(x,y)$ menyatakan fakta bahwa x dan y tinggal di kota yang sama. Jelas bahwa $\forall x\forall y\forall z(L(x,y)\wedge L(y,z) \Rightarrow L(x,z))$. Gunakan premis ini untuk membuktikan bahwa jika Peter tinggal di kota yang sama dengan Mary dan Mary tinggal di kota yang sama dengan Bill maka Peter tinggal di kota yang sama dengan Bill.
7. Tentukan unifier dari $Q(a,x,b,x,z)$ dan $Q(y,z,u,c,w)$, dimana a,b,c konstanta dan u,w,x,y,z adalah variabel

3.4. Ekuivalensi Logik

Sebagaimana kalkulus proposisi, kita dapat menggunakan ekuivalensi logik untuk memanipulasi ekspresi logik. Khususnya jika A adalah suatu ekspresi logik, kita dapat mengganti subekspresi B dalam A dengan subekspresi C , selama B ekuivalen dengan C . Untuk melakukan manipulasi ini, kita memerlukan sejumlah ekuivalensi logik dasar.

3.4.1. Ekuivalensi Logik Dasar

Tabel 3.4 berikut terdiri dari sejumlah ekuivalensi logik penting. Beberapa diantaranya telah didapatkan pada awal bab ini, tetapi disajikan kembali dengan cara yang lebih singkat dan dalam bentuk yang lebih umum. Catatan bahwa semua ekuivalensi dalam bentuk dual. Dan kenyataannya bahwa pengukur existensial adalah dual dari pengukur universal.

1a.	$\forall xA \equiv A$	Jika x bukan variabel bebas yg muncul di A
1b.	$\exists xA \equiv A$	Jika x bukan variabel bebas yg muncul di A
2a.	$\forall xA \equiv \forall yS_y^x A$	Jika y bukan variabel bebas yg muncul di A
2b.	$\exists xA \equiv \exists yS_y^x A$	Jika y bukan variabel bebas yg muncul di A
3a.	$\forall xA \equiv S_t^x A \wedge \forall xA$	Untuk sembarang t
3b.	$\exists xA \equiv S_t^x A \vee \exists xA$	Untuk sembarang t
4a.	$\forall x(A \vee B) \equiv A \vee \forall xB$	Jika x bukan variabel bebas yg muncul di A
4b.	$\exists x(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists xB$	Jika x bukan variabel bebas yg muncul di A
5a.	$\forall x(A \wedge B) \equiv \forall xA \wedge \forall xB$	
5b.	$\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$	
6a.	$\forall x\forall yA \equiv \forall y\forall xA$	
6b.	$\exists x\exists yA \equiv \exists y\exists xA$	
7a.	$\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$	
7b.	$\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$	

Tabel 3.4. Ekuivalensi yang mengandung pengukur jumlah

Banyak operasi yang mengandung pengukur jumlah lebih mudah jika variabel-variabel yang berbeda mempunyai nama yang berbeda pula, karena akan mencegah terjadinya variabel clash. Aturan 2a dan 2b memperbolehkan kita untuk mengganti nama variabel agar berbeda dengan lainnya. Contohnya, dalam ekspresi

$$\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$$

variabel x muncul dengan dua ruang lingkup yang berbeda. Dengan menggunakan aturan 2 kita dapat merubah x pada pengukur jumlah yang kedua menjadi y , sehingga ekspresi diatas berubah menjadi

$$\forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \equiv \forall xP(x) \vee \forall yQ(y)$$

Contoh lain, dalam ekspresi

$$P(x) \wedge \exists xQ(x)$$

Variabel x pertama muncul sebagai variabel bebas dan kemudian menjadi variabel terbatas. Dengan menggunakan aturan 2b, kita dapat merubahnya menjadi :

$$P(x) \wedge \exists yQ(y)$$

Contoh diatas menjelaskan bagaimana menstandarkan variabel-variabel tiap bagian.

Definisi 3.11 : Perubahan nama variabel dalam suatu ekspresi sehingga variabel-variabel yang berbeda punya nama yang berbeda disebut *standarisasi variabel terpisah*.

Beberapa operasi tidak dapat dilakukan untuk ekspresi yang mengandung pengukur jumlah yang dinegasikan. Untuk menghilangkan pengukur jumlah yang dinegasikan kita bisa menggunakan aturan 7a dan 7b. Contohnya, perhatikan ekspresi berikut ini.

$$\neg \forall x(\exists xP(x,z) \wedge \neg \forall xQ(x,z))$$

Kita bisa menghilangkan pengukur jumlah yang dinegasikan pada ekspresi tersebut dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& \neg \forall x (\exists x P(x,z) \wedge \neg \forall x Q(x,z)) \\
& \equiv \exists x \neg (\exists x P(x,z) \wedge \neg \forall x Q(x,z)) && \text{(aturan 7b)} \\
& \equiv \exists x (\neg \exists x P(x,z) \vee \forall x Q(x,z)) && \text{(De Morgan)} \\
& \equiv \exists x (\forall x \neg P(x,z) \vee \forall x Q(x,z)) && \text{(aturan 7a)}
\end{aligned}$$

3.4.2. Ekuivalensi Penting Lainnya

Pada subbab 3.3.4. telah dijelaskan keuntungan menghilangkan pengukur jumlah universal. Bagaimanapun juga, pengukur jumlah universal tidak dapat dihilangkan kecuali jika ada di awal ekspresi. Berikut ini ada ekuivalensi lain yang bisa mengatasi hal ini

$$\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y))$$

Untuk membuktikan aturan ini, kita tulis ulang aturan 4a sebagai berikut :

$$(\forall x B) \vee A \equiv \forall x (B \vee A) \quad (3.19)$$

Sekarang kita mempunyai

$$\begin{aligned}
\forall x P(x) \vee \forall y Q(y) & \equiv \forall x (P(x) \vee \forall y Q(y)) && \text{(3.19) dengan } A := \forall y Q(y) \\
& \equiv \forall x \forall y (P(x) \vee Q(y)) && \text{aturan 4 dengan } A := P(x)
\end{aligned}$$

Catatan, pada kondisi ini A tidak boleh mengandung variabel terbatas dari pengukur jumlah dalam pertanyaan yang diberikan. $\forall y Q(y)$ tidak mengandung variabel terbatas x . Kemudian jika $A = P(x)$, maka variabel terbatas adalah y dan $P(x)$ tidak mengandung y .

Perhatikan pernyataan “Jika seseorang bicara, maka akan menjadi berita besok”. Jika $C(x)$ mewakili “ x bicara” dan jika Q untuk “akan jadi berita besok”, kalimat tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\exists x C(x) \Rightarrow Q \quad (3.20)$$

Atau dapat juga dinyatakan sebagai

$$\forall x (C(x) \Rightarrow Q) \quad (3.21)$$

Kedua ekspresi tersebut ekuivalen secara logik. Untuk versi yang pertama lebih umum dalam bahasa Indonesia. Sedangkan untuk derivasi logik, versi kedua lebih baik. Tetapi secara verbal kalimat yang diperoleh lebih sulit dipahami. Misalkan

menjadi kalimat seperti : “Untuk setiap x jika x berbicara maka akan menjadi berita besok”

Aturan berikut ini menunjukkan bahwa ekspresi yang diberikan pada (3.20) dan (3.21) ekuivalen secara logik.

$$\forall x(B \Rightarrow A) \equiv \exists x B \Rightarrow A \tag{3.22}$$

Bukti dari relasi ini sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \forall x(\neg B \vee A) &\equiv (\forall x \neg B) \vee A \\ &\equiv \neg \exists x B \vee A \\ &\equiv \exists x B \Rightarrow A \end{aligned}$$

Perlu diperhatikan juga, bahwa A tidak boleh mengandung variabel x , karena x adalah variabel terbatas dari pengukur universal.

Contoh 3.7 : Jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$. Jika $G(x,y)$ berarti “ $x < y$ ” maka pernyataan itu dapat ditulis sebagai berikut :

$$G(x,y) \wedge G(y,z) \Rightarrow G(x,z)$$

Ini berlaku untuk semua x,y,z , berarti :

$$\forall x \forall y \forall z (G(x,y) \wedge G(y,z) \Rightarrow G(x,z)) \tag{3.23}$$

Kita juga bisa menyatakan bahwa $x < z$ jika ada y yang memenuhi $x < y$ dan $y < z$, yang dituliskan sebagai berikut :

$$\forall x \forall z (\exists y (G(x,y) \wedge G(y,z)) \Rightarrow G(x,z)) \tag{3.24}$$

Apakah dua ekspresi tersebut ekuivalen?

Penyelesaian : Tukar pengukur jumlah kedua dan ketiga dari (3.23) untuk mendapatkan:

$$\forall x \forall z (\forall y (G(x,y) \wedge G(y,z) \Rightarrow G(x,z)))$$

Pengukur jumlah yang paling dalam dengan menggunakan (3.22) berubah menjadi

$$\forall x \forall z (\exists y (G(x,y) \wedge G(y,z)) \Rightarrow G(x,z))$$

Sehingga kita dapat menunjukkan (3.23) dan (3.24) ekuivalen

$$\forall x \forall y \forall z (G(x,y) \wedge G(y,z) \Rightarrow G(x,z)) \equiv \forall x \forall z (\exists y (G(x,y) \wedge G(y,z)) \Rightarrow G(x,z)) \tag{3.25}$$

Latihan Soal 3.4

1. Buktikan $(\exists xB) \wedge A \equiv \exists x(B \wedge A)$ dengan menggunakan aturan pada tabel 3.4 dan hukum komutatif dari kalkulus proposisi. Asumsikan A tidak mengandung x sebagai variabel bebas.
2. Buktikan $(\forall xB) \wedge A \equiv \forall x(B \wedge A)$ dengan menggunakan aturan pada tabel 3.4 dan hukum komutatif dari kalkulus proposisi. Asumsikan A tidak mengandung x sebagai variabel bebas.
3. Perhatikan ekspresi $\forall xP(x) \vee \forall x(Q(x) \Rightarrow P(x))$. Pindahkan semua pengukur universal ke depan ekspresi tersebut.
4. Perhatikan ekspresi $\exists xP(x) \wedge \exists x(Q(x) \wedge P(x))$. Pindahkan semua pengukur universal ke depan ekspresi tersebut.
5. Pada ekspresi berikut, standarisasikan semua variabel-variabel yang terpisah.
 - a. $\forall x(\forall yP(x,y) \wedge \forall yQ(x,y)) \Rightarrow R(y)$
 - b. $\forall zQ(z) \wedge \forall xR(z) \Rightarrow \forall x(Q(x) \wedge R(z))$
 - c. $\forall uP(u) \Rightarrow (\forall vP(v) \wedge Q(v))$
 - d. $P(x) \wedge \forall xQ(x) \wedge \forall xR(x)$
6. Misalkan $F(x)$ predikat untuk “ x menemukan kutu” dan Q : “kesalahan program dapat diperbaiki”. Terjemahkan ekspresi berikut :

$$\forall x(F(x) \Rightarrow Q)$$

7. Misalkan $P = \forall yR(y)$. Gunakan aturan pada tabel 3.4 untuk menunjukkan bahwa

$$\forall x(P \vee Q(x)) \equiv \forall x\forall y(Q(x) \vee R(y))$$

8. Misalkan $P = \exists yR(y)$. Gunakan aturan pada tabel 3.4 untuk menunjukkan bahwa

$$\exists x(P \vee Q(x)) \equiv \exists x\exists y(Q(x) \vee R(y))$$

3.5. Logika Persamaan

Persamaan penting untuk melakukan operasi aljabar. Dan kenyataannya, operasi aljabar digunakan untuk merubah suatu ekspresi yang diberikan ke dalam ekspresi lain yang sama yang bisa lebih sederhana atau sesuai dengan tujuan tertentu. Persamaan juga penting dalam logika untuk menunjukkan bahwa hanya ada satu elemen yang memenuhi suatu sifat tertentu. Untuk melakukan operasi aljabar, tentu saja kita membutuhkan sebuah aljabar. Secara umum, sebuah aljabar diberikan oleh suatu domain, seperti bilangan riil, bersama dengan beberapa operator, seperti $+$ dan \times . Operator sebenarnya adalah suatu fungsi. Jadi untuk memahami operator kita harus tahu mengenai fungsi. Secara umum, fungsi mempunyai nilai atau gambaran dan nilai-nilai ini bergantung pada argumennya. Semua argumen merupakan individu-individu yang merupakan bagian dari semesta pembicaraan, dan demikian juga dengan nilai-nilainya. Dalam hal ini, suatu fungsi menentukan suatu relasi antara individu-individu tersebut. Yang membuat relasi ini khusus adalah bahwa nilai dari suatu fungsi selalu unik. Kita dapat menggunakan fungsi dimana kita gunakan suatu konstanta atau variabel.

3.5.1. Persamaan

t dan r dikatakan sama jika keduanya mengacu ke individu yang sama, dan untuk mengekspresikan ini kita tulis $t=r$. Sebagai contoh, semua anak tahu bahwa Superman dan Clark Kent adalah orang yang sama, yang dapat kita nyatakan sebagai

$$\text{Superman} = \text{Clark Kent}$$

Persamaan sebenarnya adalah predikat dan samadengan(t,r) dapat digunakan untuk menyatakan bahwa $t = r$. Dan, $t = r$ adalah suatu formula atomik yang dapat dikombinasikan dengan formula atomik lain, seperti dalam $(x=y) \wedge (y=z)$ atau $\neg(x=y)$. Tentu saja kita kadang menggunakan singkatan $x \neq y$ untuk $\neg(x=y)$. Kelihatannya sederhana untuk menentukan apakah dua obyek sama atau tidak, tapi bukan itu permasalahannya. Kita dapat menentukan persamaan dengan suatu pemberian nilai, yang berarti bahwa obyek-obyek yang sama harus disebutkan. Metode ini jelas terbatas untuk domain terhingga. Sebagai ganti dari suatu penugasan secara eksplisit, kita dapat menyediakan aturan untuk menentukan apakah dua obyek itu sama atau tidak. Disini, kita menggunakan pendekatan ketiga dan dalil sejumlah aksioma yang persamaan predikatnya telah ditentukan.

Tentu saja semua obyek t sama dengan dirinya sendiri, yang menghasilkan aksioma berikut :

$$\forall x(x = x) \quad (3.26)$$

Aksioma ini disebut **aksioma refleksif** (*reflexivity axiom*). Predikat $G(x,y)$ dikatakan refleksif jika $G(x,x)$ benar untuk semua x . Sifat yang penting lainnya dari persamaan ini adalah **sifat substitusi** (*substitution property*). Jika ada t dan r , $t=r$, adalah dua obyek, sifat substitusi membolehkan kita untuk mengganti t dalam suatu ekspresi dengan r . Sebagai contoh, jika $t=r$ dan $P(t)$ benar maka $P(r)$ juga benar. Hal ini menghasilkan suatu aturan pengambilan kesimpulan (rule of inference). Untuk memformulasikan aturan ini, pertama-tama kita perkenalkan simbol untuk melakukan pergantian. Khususnya, jika A adalah suatu ekspresi, maka $R(n)_r^t A$ merupakan ekspresi yang kita dapatkan dari A dengan mengganti obyek t yang ke n dari term t dengan r . Jika t terjadi kurang dari n kali di A , maka $R(n)_r^t A = A$. Contohnya, $R(1)_y^x (x=x)$ adalah $y = x$, $R(2)_y^x (x=x)$ adalah $x = y$ dan $R(3)_y^x (x=x)$ adalah $x=x$

Aturan substitusi : Jika A dan $t=r$ adalah dua ekspresi yang diturunkan, kita dapat menyimpulkan bahwa $R(n)_r^t A$ untuk sembarang $n > 0$. Dalam hal ini, kita mengatakan bahwa kita mensubstitusi t dari $t=r$ dalam A

Contoh substitusi $x+1$ dari $x+1=2y$ ke $x < x+1$ sama dengan $R(1)_y^x (x=x)$

Predikat persamaan bersifat **simetris**; Ini berarti jika $x = y$ maka $y = x$. Asumsikan $x=y$ dan kita buktikan $y = x$, sebagai berikut :

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\forall x (x = x)$ | aksioma refleksif |
| 3. $x = y$ | asumsi |
| 3. $x = x$ | instantiasi baris 1 dengan $x := x$ |
| 4. $y = x$ | substitusi baris 2 ke baris 3 |
| 5. $x = y \Rightarrow y = x$ | dengan teorema reduksi |

Hasil ekspresi dapat dibatasi dengan pengukur jumlah universal sebagai berikut :

$$\forall x \forall y ((x = y) \Rightarrow (y = x))$$

Akibatnya, untuk $t = u$, tidak hanya dapat mengganti t dengan u tetapi juga bisa mengganti u dengan t .

Berikutnya akan kita lihat bahwa jika $x = y$ dan $y = z$ maka $x = z$. Sifat ini disebut dengan sifat **transitif** dari persamaan. Untuk membuktikannya, kita gunakan premis $x = y$ dan $y = z$ dan akan menurunkan $x = z$ sebagai berikut :

- | | |
|------------|-------------------------------|
| 1. $x = y$ | premis |
| 3. $y = z$ | premis |
| 3. $x = z$ | substitusi baris 2 ke baris 1 |

Sehingga

$$(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$$

valid dan kita dapat mengeneralisasi untuk mendapatkan :

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z))$$

Substitusi dari tipe tersebut sering digunakan dalam pembuktian untuk refleksif dan transitif. Kita dapat melihat contoh berikut ini :

3.5.2. Persamaan Dan Keunikan

Perhatikan pernyataan “Singa adalah mamalia”. Apakah pernyataan tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$\text{Singa} = \text{mamalia}$$

Jawabannya adalah tidak. Untuk melihatnya, tambahkan pernyataan :

$$\text{Beruang} = \text{mamalia}$$

Dengan mensubstitusi pernyataan pertama ke pernyataan kedua, kita dapatkan :

$$\text{Beruang} = \text{Singa}$$

Dan jelas ini salah. Ini menunjukkan bahwa kata “adalah” tidak selalu dapat diterjemahkan menjadi $=$. Secara umum, tanda sama dengan tidak dapat digunakan jika sisi kiri dari ekspresi dapat mengacu ke obyek yang berbeda. Jika $x_1 = y$ dan $x_2 = y$ maka kita dapat menyimpulkan bahwa $x_1 = x_2$; yang berarti x_1 dan x_2 harus sama. Hanya terdapat satu x untuk setiap y sedemikian hingga $x = y$. Persamaan harus unik.

Sebaliknya, untuk menyatakan keunikan, kita gunakan persamaan. Pernyataan yang individu a adalah elemen dengan sifat P dapat dikatakan sebagai “jika x tidak sama dengan a , maka $P(x)$ salah”. Atau bisa dinyatakan ke bentuk :

$$\forall x(\neg(x = a) \Rightarrow \neg P(x))$$

Ini secara logik ekuivalen dengan :

$$\forall x(P(x) \Rightarrow (x = a))$$

Contohnya, kalimat “Hanya a yang tidak datang ke pertemuan itu” dan misalkan $P(x)$: “ x tidak datang”, dapat dinyatakan secara logik sebagai : $\forall x(P(x) \Rightarrow x = a)$ yang dalam kalimat berarti “Jika seseorang tidak datang maka dia pasti a ”

Ada satu dan hanya satu individu dengan sifat P yang dinyatakan sebagai :

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (y = x)))$$

Ini menyatakan bahwa ada suatu x yang membuat $P(x)$ bernilai benar dan $P(y)$ benar hanya jika $y = x$. Untuk menghindari penulisan yang terlalu panjang, kita dapat mendefinisikan $\exists!xP(x)$ atau $\exists!xP(x)$ untuk menunjukkan bahwa hanya satu elemen yang memenuhi P . Dengan kata lain, kita punya :

$$\exists!xP(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (y = x))) \quad (3.27)$$

Sebagai contoh, pernyataan “perusahaan hanya mempunyai satu CEO” dapat dinyatakan dalam bentuk logik, dengan menggunakan $\text{CEO}(x)$ untuk “ x adalah CEO”, sebagai berikut :

$$\exists!x\text{CEO}(x) \equiv \exists x(\text{CEO}(x) \wedge \forall y(\text{CEO}(y) \Rightarrow (y = x)))$$

Contoh kedua, misalkan $P(x)$ menyatakan “ x adalah negara” dan $Q(x)$ untuk “ x adalah ibukota” maka kita dapat menyatakan kalimat “semua negara mempunyai tepat satu ibukota” dalam bentuk :

$$\forall x(P(x) \Rightarrow \exists!yQ(y))$$

Ada cara lain untuk mengekspresikan keunikan. Jelas, jika $P(x)$ dan $P(y)$ menyebabkan $x = y$, maka ada paling banyak satu x sedemikian hingga $P(x)$ benar. Jika ada sebuah elemen dengan sifat P , maka elemen ini unik. Sehingga,

$$\exists!xP(x) \equiv \exists xP(x) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y) \quad (3.28)$$

Contohnya, ada dalam kalimat “ada tepat satu tukang kayu di kota itu”. Jika $T(x)$: “ x tukang kayu” dan jika ada paling banyak satu tukang kayu maka $T(x) \wedge T(y)$ berakibat $x = y$. Dalam logika, ini dapat dinyatakan sebagai $\forall x \forall y (T(x) \wedge T(y) \Rightarrow (x=y))$. Jika ada tepat satu tukang kayu, kita akan mempunyai :

$$\exists x T(x) \wedge \forall x \forall y (T(x) \wedge T(y) \Rightarrow x = y)$$

3.5.3. Fungsi Dan Logika Persamaan

Kita semua tentu sudah mengenal apa itu fungsi. Dan fungsi sangat penting dalam logika persamaan. Misalkan, nilai mutlak dari x , $|x|$, adalah suatu fungsi x , juga kuadrat dari x , x^2 . Kedua contoh fungsi tersebut, dikatakan suatu fungsi dengan satu argumen yaitu x . Ada juga fungsi-fungsi dengan banyak argumen. Contohnya, $f(x,y) = x^2 + y$, f adalah fungsi dengan dua argumen x dan y . Untuk lebih mudahnya, pertama-tama kita akan membahas fungsi-fungsi dengan satu argumen.

Untuk mendefinisikan suatu fungsi, pertama harus kita beri nama, seperti f . Kemudian akan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.12 : Suatu fungsi f dengan satu argumen menghubungkan tiap individu x dengan suatu individu unik y , yang mengacu ke $f(x)$. Nilai $y = f(x)$ disebut bayangan (*image*) dari x

Tiap fungsi mempunyai bayangan yang unik. Misalkan untuk fungsi $f(x) = x + 1$, dengan domain bilangan asli, maka nilai $y = f(1) = 2$ dan tidak ada nilai y lain yang memenuhi.

Definisi 3.13 : Suatu fungsi dengan n argumen dikatakan fungsi n -ary. Fungsi f dengan n -ary menghubungkan n individu, x_1, x_2, \dots, x_n , dengan suatu individu unik $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Individu y dikatakan sebagai bayangan dari x_1, x_2, \dots, x_n .

Contohnya, misalkan dalam domain bilangan bulat, $p(x,y) = x + y$ merupakan sebuah fungsi, tetapi $d(x,y) = x/y$ bukan fungsi pada domain tersebut, karena untuk bilangan bulat $x = 2$ dan $y = 3$ akan menghasilkan $d(2,3) = 2/3$ dan $2/3$ bukan merupakan bilangan bulat.

Kenyataan bahwa dalam fungsi f tiap x mempunyai suatu bayangan unik y adalah penting. Tanpa kondisi ini, kita tidak dapat menyatakan $y = f(x)$ tanpa resiko terjadinya fallacy. Untuk menunjukkan hal ini, perhatikan contoh berikut ini. Misalkan $y=f(x)$ jika $x = y^2$ atau $f(x)=\pm\sqrt{y}$. Dengan menggunakan $f(x)$ sebagai suatu fungsi kita dapat membuktikan bahwa $1=-1$.

- | | |
|----------------|---|
| 1. $1 = 1$ | refleksif persamaan |
| 3. $1 = f(1)$ | $1 = \pm\sqrt{1}$ |
| 3. $-1 = f(1)$ | $-1 = \pm\sqrt{1}$ |
| 4. $1 = -1$ | substitusi $f(1)$ pada baris 2 dengan baris 3 |

Definisi dari suatu fungsi menyebabkan ada suatu bayangan untuk setiap argumen atau, jika fungsi tersebut punya n argumen, untuk setiap kemungkinan n -tuple argumen. Hal ini penting dalam logika, karena predikat yang menggunakan fungsi sebagai obyek mungkin tidak dapat didefinisikan. Diluar itu, kadang perlu menghilangkan pembatasan ini. Sebagai contoh, secara teknis, $1/x$ bukan sebuah fungsi dari x dalam domain bilangan riil.

Definisi 3.14 : Suatu fungsi parsial (*partial function*) 1-ary menghubungkan tiap individu x dengan paling banyak satu individu y , jika ada, yang mengacu kepada $f(x)$. Atau dengan kata lain, suatu fungsi parsial g dengan n -ary menghubungkan tiap n -tuple dari individu x_1, x_2, \dots, x_n pada paling banyak satu individu $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sebagai catatan bahwa setiap fungsi adalah sebuah fungsi parsial, tetapi tidak setiap fungsi parsial adalah suatu fungsi. Misalkan, pada domain bilangan bulat, $f(x) = x/2$ adalah sebuah fungsi parsial. Karena kita jika x bilangan ganjil maka $f(x)$ bukan bilangan bulat dan tidak dapat dihubungkan. Sehingga $f(x)$ bukanlah sebuah fungsi menurut definisi 3.13.

Definisi 3.15 : Sebuah fungsi parsial yang bukan suatu fungsi disebut **fungsi parsial sebenarnya** (*strict partial function*)

3.5.4. Komposisi Fungsi

Jika f sebuah fungsi dengan satu variabel, maka $z = f(y)$ adalah bayangan dari y dibawah fungsi f . Karena tiap individu y punya satu bayangan, kita dapat

menetapkan $y = g(x)$, dimana g merupakan fungsi dengan satu variabel. Ini membangun hubungan tiap x dengan sebuah nilai unik z , dimana $z = f(g(x))$.

Definisi 3.16 : Misalkan f dan g dua fungsi dengan satu argumen. Fungsi yang menghubungkan tiap x dengan nilai $f(g(x))$ disebut komposisi dari f dan g dan ditulis dengan $f \circ g$. Dan bahwa $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Kita juga menggunakan kata komposisi untuk komposisi dari fungsi parsial. Sehingga, jika f dan g adalah dua fungsi parsial, $f \circ g$ adalah fungsi parsial yang menghubungkan individu $f(g(x))$ dengan x , jika ada.

Sebagai contoh, misalkan m adalah fungsi yang menghubungkan tiap x dengan ibunya, dan misal f adalah fungsi yang menghubungkan x dengan ayahnya. Maka $f(m(x))$ adalah ayah dari ibu x , $f(f(x))$ adalah ayah dari ayah x , $m(f(x))$ adalah ibu dari ayah x dan $m(m(x))$ adalah ibu dari ibunya x . Oleh karena itu, $f \circ m$ adalah fungsi yang menghubungkan tiap individu dengan kakek dari pihak ibunya, $f \circ f$ adalah fungsi yang menghubungkan tiap individu dengan kakek dari pihak ayah, dan seterusnya. Catatan bahwa $f \circ m$ dan $m \circ f$ berbeda. $f \circ m$ adalah fungsi kakek dari pihak ibu sedangkan $m \circ f$ adalah fungsi nenek dari pihak ayah.

Kita juga dapat membentuk komposisi yang mengandung fungsi dengan beberapa variabel, seperti ditunjukkan contoh berikut ini. Misalkan $s(x,y) = x + y$, dan $p(x,y) = x \times y$. Maka $p(s(x,y),z)$, $s(z,p(x,y))$ dan $s(s(z,x),y)$ semuanya adalah fungsi komposisi, yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} p(s(x,y),z) &= (x+y) \times z \\ s(z,p(x,y)) &= z + (x \times y) \\ s(s(x,y),y) &= (x + z) + y \end{aligned}$$

Operator adalah fungsi. Bagaimanapun juga, ekspresi-ekspresi cenderung menjadi lebih jelas jika ditulis dengan menggunakan operator daripada jika ditulis sebagai fungsi. Misalkan, $(x+y) \times z$ menjadi lebih jelas daripada $p(s(x,y),z)$. Untuk itu sekarang kita akan menggunakan simbol operator daripada fungsi. Yang perlu diperhatikan bahwa penggunaan operator hanya berlaku untuk fungsi total dan sekali-kali digunakan dalam fungsi parsial. Contohnya, operator pembagian / merupakan suatu fungsi parsial. Suatu domain, bersama dengan satu atau lebih operator merupakan sebuah aljabar. Karena sebuah operator adalah fungsi atau paling tidak berupa fungsi parsial, ekspresi aljabar sebenarnya merupakan

komposisi, atau bahkan komposisi dari komposisi. Ini berarti, kita dapat menyatakan bahwa aljabar berhubungan dengan komposisi fungsi.

Ekspresi aljabar seharusnya tidak mendua arti, karena fallacy mengakibatkan sebaliknya. Sebagai contoh, $3 \times 4 + 5$ dapat dianalisa sebagai $(3 \times 4) + 5$ atau $3 \times (4 + 5)$, dan jika analisa yang digunakan salah akan menyebabkan hasil derivasinya salah. Berikut ini adalah proses derivasi untuk menunjukkan bahwa $12 = 6$.

- | | |
|--------------------------|--|
| 1. $3 = 2 + 1$ | premis |
| 3. $12 = 3 \times 4$ | premis |
| 3. $12 = 2 + 1 \times 4$ | substitusi 3 dengan $2 + 1$ pada baris 2 |

Sehingga diperoleh $12 = 2 + 4 = 6$, yang jelas salah. Untuk mencegah kesalahan seperti ini, kita dapat menggunakan ekspresi dengan tanda kurung lengkap (*fully parenthesized*). Jika baris 1 ditulis sebagai $3 = (2 + 1)$, dan baris 2 ditulis $12 = (3 \times 4)$, hasilnya akan menjadi $12 = ((2+1) \times 4)$, yang tidak menghasilkan kesalahan kesimpulan. Tapi bisa juga kita menggunakan operator presedensi, seperti telah dijelaskan sebelumnya.

3.5.5. Sifat dari Operator

Kita tentu saja sudah tahu sifat dari aljabar biasa. Misalkan sifat komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian, dimana $x+y=y+x$ atau $x \times y = y \times x$.

Definisi 3.17 : Sebuah fungsi 2-ary (binary) bersifat komutatif jika $f(x,y) = f(y,x)$. Sama halnya jika \circ adalah operator, maka \circ dikatakan komutatif jika $x \circ y = y \circ x$

Saat berbicara mengenai operator, akan selalu mengacu ke suatu domain tertentu. Catatan, bagaimanapun juga, operator yang sama mungkin digunakan dalam domain yang berbeda. Ini biasa disebut dengan *operator overloading*. Simbol operator $+$, misalkan, digunakan untuk bilangan asli, bulat dan bilangan riil. Dalam kasus ini, diasumsikan bahwa sebenarnya ada tiga operator yang berbeda, satu operator untuk tiap domain. Seringkali domain diberikan dengan konteks.

Operator tidak hanya terbatas pada operator aritmatik. Semua kata sambung logik dapat dianggap sebagai operator. \wedge dan \vee merupakan operator yang komutatif, sedangkan \Rightarrow tidak komutatif. Jika kita bekerja dengan file, kita dapat mendefinisikan beberapa operator. Operator *merge* dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa dua file digabung (di-merge) Operator merge juga komutatif.

Jika \circ adalah sebuah operator yang didefinisikan untuk semesta yang terhingga, kita dapat menyatakan hasil dari operator tersebut dengan menggunakan sebuah tabel. Tabel ini disebut dengan **tabel operasi** (*operation table*). Sebagai contoh tabel operasi dapat di lihat pada tabel berikut :

\circ	a	b	c	d
a	a	b	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	a	b	a	b

Tabel 3.5. Tabel operasi untuk \circ

Dalam kasus ini, domain = $\{a,b,c,d\}$ dan hasil $x \circ y$ ada di baris x . Contohnya $a \circ c = d$, sebagaimana terlihat pada baris dengan label a dan kolom dengan label c . Tabel kebenaran dari kata sambung logik tentu saja merupakan tabel operasi.

Definisi 3.18 : Jika \circ sebuah operator, maka \circ dikatakan bersifat assosiatif jika untuk semua x,y dan z , berlaku $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

Operator $+$ bersifat assosiatif, karena $(x + y)+z = x+(y+z)$. Operator $-$ tidak assosiatif, karena tidak benar bahwa $(x - y) - z = x - (y - z)$. Jika operator \circ assosiatif dan jika suatu ekspresi hanya mengandung operator \circ kita dapat menghilangkan tanda kurung.

Untuk mendapatkan bahwa operator \circ diberikan oleh tabel operasi bersifat assosiatif, kita harus membuktikan bahwa $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ untuk semua kemungkinan kombinasi x,y dan z . Contoh, misalkan domain = $\{a,b\}$ dan diberikan tabel operasi untuk \circ sebagai berikut:

	a	b
a	a	b
b	a	a

Kita dapat menunjukkan apakah operator \circ tersebut assosiatif dengan menggunakan tabel kombinasi semua kemungkinan dari a dan b berikut ini :

x	y	z	$y \circ z$	$x \circ (y \circ z)$	$x \circ y$	$(x \circ y) \circ z$
a	a	a	a	a	a	a
a	a	b	b	b	a	b
a	b	a	a	a	b	a
a	b	b	a	a	b	a
b	a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	a	a	b
b	b	a	a	a	a	a
b	b	b	a	a	a	b

Pada baris ke 6 dan 8 disitu jelas terlihat bahwa hasil $x \circ (y \circ z) = a \neq (x \circ y) \circ z = b$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa operator tersebut tidak assosiatif.

Jika beberapa operator didefinisikan dalam domain yang sama, maka relasi antara operator-operator tersebut menjadi penting. Dalam aritmatika, kita punya penjumlahan dan perkalian, dan di aljabar proposisi, kita punya \wedge dan \vee . Sekarang perhatikan sistem yang mempunyai dua operator yaitu \circ dan \square

Definisi 3.19: Misalkan \circ dan \square adalah dua operator. Operator \circ dikatakan **distributif kiri** (*left distributive*) terhadap \square jika untuk semua x, y dan z , memenuhi

$$x \circ (y \square z) = (x \circ y) \square (x \circ z)$$

Operator \circ dikatakan **distributif kanan** (*right distributive*) terhadap \square jika untuk semua x, y, z memenuhi :

$$(y \square z) \circ x = (y \circ x) \square (z \circ x)$$

Sebuah operator yang distributif kiri dan kanan dikatakan bersifat **distributif** (*distributive*)

Jika \circ distributif kiri terhadap \square dan jika \circ komutatif, maka \circ juga distributif kanan terhadap \square .

3.5.6. Elemen Identitas dan Elemen Nol

Dalam subbab ini kita akan membahas dua elemen, elemen identitas dan elemen nol, yang jika ini ada, akan sangat berguna untuk melakukan manipulasi aljabar. Yang secara umum, elemen-elemen ini digunakan untuk menyederhanakan ekspresi aljabar.

Definisi 3.20 : Misalkan \circ adalah sebuah operator, yang didefinisikan untuk suatu semesta pembicaraan. Jika ada sebuah individu e_r dengan sifat $x \circ e_r = x$ untuk semua x , maka e_r dikatakan sebagai identitas kanan (*right identity*). Jika ada suatu individu e_l sedemikian hingga $e_l \circ x = x$, maka e_l disebut identitas kiri (*left identity*). Individu e yang merupakan identitas kiri dan identitas kanan disebut sebagai elemen identitas (*identity*)

Jika suatu operator memproses kedua identitas kiri dan kanan, maka dua elemen identitas tersebut harus sama. Identitas yang sebagai identitas kiri sekaligus identitas kanan merupakan identitas yang unik. Pada tabel 3.7. berikut ini adalah contoh tabel operasi untuk operator \circ dengan tiga elemen a, b, c . Dari tabel itu kita bisa melihat bahwa $a \circ x = x$, untuk $x = a, b, c$. Yang berarti a adalah identitas kiri. Demikian juga dengan elemen c . Dan ternyata tidak terdapat identitas kanan.

	a	b	c
a	a	b	c
b	c	b	a
c	a	b	c

Tabel 3.7. Contoh tabel operasi identitas untuk \circ

Jika sebuah operator komutatif, identitas kanan harus sama dengan identitas kiri. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut : Jika e_l identitas kiri dari \circ dan jika \circ komutatif, maka $e_l \circ x = x \circ e_l$ yang membuat e_l menjadi identitas kanan. Ini berarti untuk operator yang komutatif hanya ada satu identitas yang menjadi identitas kiri sekaligus identitas kanan. Contohnya untuk operasi perkalian yang mempunyai sifat komutatif, maka terdapat sebuah identitas 1 dimana untuk semua x memenuhi $x \times 1 = x$.

Misalkan operator \circ mempunyai identitas kanan dan kiri e . Ada subekspresi dengan bentuk $x \circ y$ yang memenuhi $x \circ y = e$ dapat dihapus. Untuk memfasilitasi penghapusan, kita definisikan *inverse* sebagai berikut :

Definisi 3.21: Jika \circ adalah sebuah operator dan jika x suatu individu, maka y disebut **invers kiri** (*left inverse*) dari x jika $y \circ x = e$. Dan jika $x \circ y = e$, maka y disebut **invers kanan** (*right inverse*) dari x . Suatu individu yang merupakan invers kiri dan kanan dari x disebut **invers** dari x

Contohnya, perhatikan tabel 3.8 berikut ini :

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	a	c
c	c	b	d	c
d	d	a	b	c

Tabel 3.7. Invers

Dalam tabel tersebut terdapat identitas a . Untuk mendapatkan invers, kita mencari semua kombinasi $x \circ y$ yang sama dengan a . Dan kita dapatkan :

$$a \circ a = a, \quad b \circ b = a, \quad b \circ c = a, \quad d \circ b = a$$

Maka a adalah invers dari dirinya sendiri, demikian juga b . Juga b adalah invers kiri dari c , dan c invers kanan dari b . Sama halnya dengan d yang merupakan invers kiri dari b , dan b adalah invers kanan dari d .

Teorema 3.1 : Jika operator \circ punya identitas (kiri dan kanan) yaitu e , jika \circ asosiatif, dan jika invers kiri dan kanan dari x sama, maka x mempunyai **invers unik**.

Dalam ekspresi yang mengandung invers, kita dapat menulis ulang term-term dengan suatu cara sehingga invers tersebut dapat dikombinasikan untuk mendapatkan elemen identitas, yang dapat dibuang. Sebagai contoh, ekspresi

$$\begin{aligned}
 &(x + y) + (-x) \\
 \equiv &(y + x) + (-x) && \text{komutatif} \\
 \equiv &y + (x + (-x)) && \text{asosiatif} \\
 \equiv &y + 0 && x + (-x) = \text{identitas dari } + \text{ yaitu } 0. \\
 \equiv &y && \text{identitas } 0 \text{ dapat dihilangkan}
 \end{aligned}$$

Elemen penting lainnya adalah **elemen nol**. Untuk menghindari perbedaan antara nol kanan dan nol kiri, kita asumsikan operatornya bersifat komutatif.

Definisi 3.22 : Sebuah elemen d disebut **elemen nol** (*zero element*) dari operator komutatif \circ jika untuk semua x , $x \circ d = d$

Contohnya adalah elemen 0 pada operator perkalian (\times) dimana $x \times 0 = 0$. Tidak semua operator mempunyai elemen nol. Umumnya, operator $+$ untuk bilangan bulat tidak mempunyai elemen nol. Karena tidak ada bilangan d , dimana $x+d=d$ untuk semua bilangan x .

Misalkan \circ adalah operator komutatif dan assosiatif dengan elemen nol d . Maka $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = d$ jika sebuah term tunggal x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sama dengan elemen nol d . Contohnya, untuk operasi perkalian $x \times y \times z = 0$ jika salah satu x, y, z bernilai 0.

3.5.7. Derivasi Dalam Logika Persamaan

Logika persamaan dengan dua operator sekarang akan digunakan untuk memberikan derivasi formal. Dalam logika persamaan, sebagaimana dalam derivasi formal, unifikasi memegang peranan penting.

Telah dijelaskan bahwa jika suatu operator mempunyai identitas kiri dan identitas kanan maka dua identitas ini sama dan tidak ada identitas lainnya. Sehingga jika u dan u' adalah dua identitas kiri dan jika v dan v' adalah dua identitas kanan, maka $u = u' = v = v'$. Disini akan kita lakukan derivasi untuk mendapatkan kesimpulan tersebut. Berikut ini adalah premis-premis :

- | | |
|-----------------------|---|
| 1. $u \circ x = x$ | u adalah identitas kiri, x adalah variabel. |
| 3. $x \circ v = x$ | v adalah identitas kanan, x adalah variabel. |
| 3. $u' \circ x = x$ | u' identitas kiri, dan x variabel |
| 4. $x \circ v' = x$ | v' identitas kanan, dan x variabel |
| 5. $u \circ v = v$ | instantiasi baris 1 dengan $x:=v$ |
| 6. $u \circ v = u$ | instantiasi baris 2 dengan $x:=u$ |
| 7. $u = v$ | substitusi $u \circ v$ di baris 5 dengan baris 6 |
| 8. $u' \circ v' = v'$ | instantiasi baris 3 dengan $x:=v'$ |
| 9. $u' \circ v' = u'$ | instantiasi baris 4 dengan $x:=u'$ |
| 10. $u' = v'$ | substitusi $u' \circ v'$ di baris 8 dengan baris 9 |
| 11. $u \circ v' = v'$ | instantiasi baris 1 dengan $x:=v'$ |
| 13. $u \circ v' = u$ | instantiasi baris 4 dengan $x:=u$. |
| 13. $u = v'$ | substitusi $u \circ v'$ di baris 11 dengan baris 12 |

Persamaan baris 7, 10 dan 13 menunjukkan bahwa u, v, v' dan u' semuanya sama. Untuk lebih teliti, kita dapat membuktikan persamaan untuk tiap kombinasi dari empat variabel ini; Ini akan membuktikan bahwa $u = v$, $u = v'$, $u = u'$, $v = v'$ dan seterusnya.

Misalkan d adalah invers dari c . Maka

$$\forall x((x \circ c) \circ d = x) \quad (3.31)$$

Untuk suatu pembuktian formal, semua premis harus ditetapkan. Bukti diberikan sebagai berikut :

- | | |
|--|---|
| 1. $x \circ e = x$ | e adalah identitas, x variabel |
| 3. $c \circ d = e$ | d adalah invers dari c , dimana c, d tetap |
| 3. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ | operator assosiatif dan x, y, z adalah variabel |

Baris 1 menunjukkan bahwa untuk mempunyai invers kita harus mempunyai identitas. Identitas tersebut dinotasikan dengan e . Baris 2 mendefinisikan d yang merupakan invers dari c , dan baris 3 menunjukkan bahwa \circ assosiatif. Untuk mendapatkan $(x \circ c) \circ d = x$, pertama-tama unify $(x \circ c) \circ d$ dengan ruas kiri baris 3. Ini akan menghasilkan seperti di baris 4.

- | | |
|--|--|
| 4. $(x \circ c) \circ d = x \circ (c \circ d)$ | instantiasi baris 3 dengan $y:=c$ dan $z:=d$ |
| 5. $(x \circ c) \circ d = x \circ e$ | ganti $c \circ d$ di baris 4 dengan baris 2 |
| 6. $(x \circ c) \circ d = x$ | substitusikan baris 1 ke baris 5 |

Karena x adalah variabel sejati, kita dapat men-generalisasi baris terakhir untuk mendapatkan (3.32) seperti yang diinginkan.

Dalam beberapa kasus, ada yang tidak menggunakan premis secara langsung. Pada kasus seperti ini, kita menggunakan aksioma refleksif untuk mendapatkan suatu persamaan yang kemudian dapat dimodifikasi dengan substitusi.

Contoh 3.8 : Tunjukkan bahwa $a \circ (b \circ e) = a \circ b$. Dimana e adalah identitas.

Penyelesaian : Premis-premisnya adalah aksioma refleksif dan definisi dari identitas. Aksioma refleksif digunakan pertama kali, dengan x diinstantiasi ke ruas kiri dari konklusi yang diharapkan. Berikut ini adalah penurunan hasilnya

- | | |
|--|---|
| 1. $\forall x(x = x)$ | aksioma refleksif |
| 3. $\forall x(x \circ e = x)$ | definisi dari identitas e |
| 3. $a \circ (b \circ e) = a \circ (b \circ e)$ | instantiasi baris 1 dengan $x := a \circ (b \circ e)$ |

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 4. $b \circ e = b$ | instantiasi baris 2 dengan $x:=b$ |
| 5. $a \circ (b \circ e) = a \circ b$ | ganti ruas kanan baris 3 dengan baris 4 |

Kita juga dapat menambahkan konstanta di kedua ruas dari suatu persamaan dan dapat mengalikan kedua ruas persamaan dengan suatu konstanta. Secara umum, dari $a = b$, kita dapat mendapatkan $a \circ c = b \circ c$ untuk operator \circ . Kita dapat buktikan sebagai berikut :

- | | |
|----------------------------|--|
| 1. $\forall x(x = x)$ | axioma refleksif |
| 2. $a = b$ | premis |
| 3. $a \circ c = a \circ c$ | instantiasi baris 1 dengan $a \circ c$ |
| 4. $a \circ c = b \circ c$ | substitusikan dari baris 2 ke baris 3 |

Langkah dari $a = b$ ke $a \circ c = b \circ c$ disebut *postmultiplication*. Sesuai dengan namanya, *postmultiplication* tidak selalu harus dikalikan; ini meliputi beberapa operator termasuk penjumlahan, operator boolean, dan lainnya. Ada juga yang disebut persamaan *premultiply*. Sebagai contoh jika $a = b$ maka *premultiplication* dengan c menghasilkan $c \circ a = c \circ b$. Catatan bahwa a, b, c adalah variabel sejati, yang berarti dapat digeneralisasi sebagai berikut :

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \Rightarrow (z \circ x = z \circ y)) \tag{3.32}$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \Rightarrow (x \circ z = y \circ z)) \tag{3.33}$$

3.5.8. Aljabar Boolean

Aljabar boolean adalah sebuah aljabar dengan dua operator, yang dinotasikan dengan $+$ dan \cdot . Kedua operator mendefinisikan bahwa $x + y$ dan $x \cdot y$ untuk semua argumen x dan y . Lebih jelas lagi, aljabar boolean mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

1. Ada sebuah elemen identitas untuk $+$ yaitu 0
2. Ada sebuah elemen identitas untuk \cdot yaitu 1.
3. Operator $+$ bersifat komutatif
4. Operator \cdot bersifat komutatif
5. Operator $+$ bersifat distributif terhadap \cdot
6. Operator \cdot bersifat distributif terhadap $+$
7. Untuk setiap individu x , ada sebuah elemen x' yang disebut komplemen x , dengan sifat $x + x' = 1$ dan $x \cdot x' = 0$.
8. Domain beranggotakan sedikitnya dua elemen.

Operator \cdot terkadang diabaikan atau tidak dituliskan. Dalam kasus sederhana, domain dari suatu aljabar Boolean terdiri dari dua nilai yaitu 0 dan 1. Aljabar

Boolean yang demikian disebut dengan **aljabar boolean bernilai dua** (*two-valued Boolean algebra*). Berikut ini adalah sifat dari aljabar boolean bernilai dua :

1. Komplemen x' didefinisikan sebagai

$$0' = 1, \quad 1' = 0$$

2. Operator $+$ dan \cdot didefinisikan dengan tabel operasi berikut:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

Karena tabel operasi $+$ dan \cdot keduanya simetri, aljabar boolean ini bersifat komutatif. Dari tabel tersebut juga dapat dilihat bahwa 0 adalah elemen identitas dari $+$ dan 1 adalah elemen identitas dari \cdot , dan untuk menunjukkan bahwa operator $+$ distributif terhadap \cdot , maka kita buktikan untuk semua $x, y, z = 0, 1$ memenuhi

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad (3.1)$$

Pembuktiannya dapat dilihat pada tabel 3.1. Dalam tabel ini, $x + (y \cdot z)$ diberikan pada kolom dengan label 2 dan $(x + y) \cdot (x + z)$ di kolom 5. Dapat dilihat bahwa nilai dari kedua kolom tersebut sama. Ini berarti persamaan 3.1 terpenuhi. Dengan cara yang sama kita juga dapat menunjukkan bahwa operator \cdot distributif terhadap $+$.

x	y	z	1 $y \cdot z$	2 $x + y \cdot z$	3 $x + y$	4 $x + z$	5 $(x + y) \cdot (x + z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel 3.1. Aljabar Boolean distributif

Terakhir, $0 + 0' = 1$ dan $1 + 1' = 1$, yang berarti bahwa, untuk semua x , $x + x' = 1$. Demikian juga $x.x'=0$ untuk semua x dapat ditunjukkan dengan cara yang sama.

Karena 0 adalah elemen identitas untuk +, maka kita mempunyai $0 + 0 = 0$ dan $0+1=1+0=1$, dan karena 1 adalah elemen identitas dari ., maka kita punya $1.1=1$ dan $1.0=0.1=0$.

Jika dalam aljabar proposisi semua ekivalensi dinyatakan dalam bentuk persamaan, maka aljabar proposisi menjadi sebuah aljabar Boolean. Kita bisa melihat dalam tabel 3.9. Ada suatu sistem dualitas dalam aljabar boolean. Dalam sistem dual, 0 diganti 1 dan sebaliknya, juga + diganti . dan sebaliknya. Contohnya, $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$ dalam aljabar proposisi dapat dinyatakan dalam aljabar boolean sebagai berikut : $p+p' = 1$ dan dual dari ekspresi ini adalah $p.p'=0$

Aljabar Boolean	Aljabar Proposisi	Bahasa Indonesia
0	F	salah
1	T	Benar
+	\vee	Atau
.	\wedge	Dan
x'	$\neg x$	Tidak/bukan

Tabel 3.9. Ekivalensi antara aljabar boolean dan aljabar proposisi

Contoh Soal 3.5

- Gunakan aturan pengambilan keputusan (rule of inference) untuk menunjukkan bahwa :

$$(x = y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$$

- Misalkan $E(x)$: “ x adalah seorang tukang listrik”, dan j adalah Jim. Nyatakan ekspresi “Jim adalah satu-satunya tukang listrik” dalam kalkulus predikat dengan dan tanpa $\exists!$.
- Nyatakan kenyataan bahwa ada kurang dari dua elemen dengan sifat P . Gunakan hanya pengukur jumlah universal dan eksistensial.
- Misalkan $x \circ y$ menyatakan pembagi persekutuan terbesar dari x dan y . Tunjukkan bahwa \circ komutatif dan asosiatif. Temukan juga elemen identitas dan elemen nol dari \circ , jika ada.

5. Buktikan bahwa $a \circ b = a \circ c$ menyebabkan $b = c$, dan diketahui bahwa a mempunyai invers a^{-1} .
6. Misalkan kata sambung \Rightarrow dari suatu aljabar titik pandang. Diasumsikan bahwa tiap ekspresi bernilai F atau T .
 - a. Gunakan tabel 3.7 sebagai contoh, tulis tabel operasi untuk \Rightarrow
 - b. Formulasikan kondisi bahwa sebuah elemen dari himpunan $\{F, T\}$ harus memenuhi identitas kiri dari \Rightarrow . Apakah ada identitas kiri? Apakah ada identitas kanan?
 - c. Apakah \Rightarrow punya elemen nol kiri? Apakah \Rightarrow punya elemen nol kanan?
7. Sebuah domain, bersama dengan operator \circ disebut sebuah grup, jika dan hanya jika \circ asosiatif, punya identitas, dan tiap elemennya punya invers. Manakan diantara yang disebutkan berikut ini merupakan grup?
 - a. Domain himpunan bilangan bulat dan \circ menyatakan $+$
 - b. Domain himpunan bilangan bulat dan \circ menyatakan \times
 - c. Domain = $\{0, 1, 2, \dots\}$ dan \circ menyatakan $+$
8. Tunjukkan dengan langkah-langkah bahwa perkalian $a^{-1}baab^{-1} = a$
9. Dengan menggunakan aksioma dan aturan pengambilan keputusan untuk persamaan, rubahlah (3.34) ke dalam suatu derivasi formal.
10. Tentukan $S(3)$, jika diketahui $S(0) = 1$ dan $S(n+1) = S(n) + n$. Tunjukkan semua langkahnya.

SOAL-SOAL BAB III

1. Rubahlah kalimat berikut dalam logik. Diberikan singkatan atau simbol yang digunakan untuk menunjukkan proposisi dan predikat.
 - a. Semua orang punya leluhur, tetapi tidak semua orang punya keturunan. Gunakan $A(x,y)$ jika x adalah leluhur y , dan formulasikan keturunan menggunakan predikat A . Semesta pembicaraan adalah himpunan semua orang yang hidup.
 - b. Ada bilangan yang lebih besar dari yang lainnya, tetapi semua bilangan kecuali 0 lebih besar dari 0.
2. Diketahui ada tiga individu dalam domain, berapa banyak kemungkinan pemberian nilai untuk sebuah predikat dengan aritas 2?
3. Nyatakan kalimat berikut dalam kalkulus predikat. Gunakan semesta pembicaraan yang diberikan di dalam kurung.
 - a. Ada binatang yang bukan singa (binatang di kebun binatang)
 - b. Tidak semua kucing punya ekor (binatang)
 - c. Sapi memberikan susu hanya jika mereka punya anak, dan jika tidak diberi makan dengan baik, mereka tidak akan memberi banyak susu. Gunakan $sapi(x)$, $anaksapi(x,y)$, $memberipakan(x)$, $memberisusu(x)$ dan $memberisusubanyak(x)$.
4. Terjemahan dari suatu pernyataan ke dalam kalkulus predikat tergantung pada semesta pembicaraan yang dipilih. Perhatikan pernyataan berikut : "semua burung punya sayap, tetapi ada burung yang tidak dapat terbang". Rubahlah kalimat tersebut ke dalam predikat kalkulus, jika diketahui semesta pembicaraan sebagai berikut :
 - a. Himpunan semua burung
 - b. Himpunan semua binatang
 - c. Bersayap, sebagai tambahan ke dalam himpunan semua binatang.
5. Misalkan $P(x,y,z)$ adalah predikat yang bernilai benar jika $x + y = z$, dan selain itu salah. Rubahlah $\exists y \forall x P(x,y,x)$ ke dalam bahasa Indonesia. Tentukan contoh yang menunjukkan bahwa $\exists y \forall x P(x,y,x)$ benar dalam domain bilangan riil.
6. Mana diantara ekspresi berikut yang valid, tidak valid atau kontradiksi?
 - a. $P(x) \vee P(y)$
 - b. $P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$
 - c. $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$
 - d. $\exists x (P(x) \wedge \neg P(x))$
 - e. $\forall x P(x)$

7. Tentukan interpretasi yang memenuhi tiga ekspresi berikut secara simultan :
- $$\begin{aligned} & \forall x \neg G(x,x) \\ & \forall x \forall y \neg (G(x,y) \wedge G(y,x)) \\ & \exists x \exists y \forall x \exists z (G(x,y) \wedge G(y,z) \wedge G(z,z)) \end{aligned}$$
8. Perhatikan premis berikut : $\exists x M(x)$, $\forall x (M(x) \Rightarrow \exists y C(x,y))$, dan $\forall x (\exists y C(x,y) \Rightarrow F(x))$. Berikan derivasi formal untuk membuktikan bahwa premis ini menghasilkan satu konklusi dimana harus ada satu y yang menyebabkan $F(x)$ bernilai benar. Tentukan aturan yang digunakan dalam derivasi tersebut.
9. Buktikan ekspresi berikut dengan derivasi.
- $\forall x P(x) \circ \forall x (P(x) \vee Q(x))$
 - $\exists x \forall y P(x,y) \circ \forall y \exists x P(x,y)$
 - $\exists y \forall x P(x,y,z) \circ \exists z P(z,z,z)$
10. Berikan suatu derivasi formal untuk $(P(a) \wedge \forall x P(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x)$. Gunakan hanya aturan yang ada di bab 1.6.4, teorema deduksi dan UI, UG, EI dan EG.
11. Semesta pembicaraan adalah himpunan burung. Premis adalah bahwa semua burung punya sayap dan bulu, yang dituliskan sebagai $\forall x (S(x) \wedge B(x))$. Berikan derivasi formal untuk membuktikan bahwa semua burung punya bulu. Gunakan UI, UG dan simplifikasi.
12. Formulasikan pernyataan berikut dalam kalkulus predikat. Untuk itu, kamu perlu domain. Domain-domain ini diberikan dalam tanda kurung di awal tiap pernyataan. Catatan bahwa pernyataan tersebut mengandung beberapa kalimat konjungsi.
- (manusia) Profesor itu memberi tugas pada hari Senin dan berikutnya pada hari Rabu. Semua murid keberatan dan beberapa murid tidak dapat menyelesaikan tugas mereka.
 - (himpunan $\{0,1,\dots\}$) Sebuah bilangan antara a dan b jika dan hanya jika bilangan itu lebih besar dari a tetapi kurang dari b .
13. Rubah pernyataan “hanya ada satu ikan di dalam kolam” ke dalam notasi predikat.
- Asumsikan bahwa semesta pembicaraan terdiri dari ikan-ikan dalam sebuah kolam
 - Asumsikan bahwa semesta pembicaraan terdiri dari ikan-ikan secara umum.

14. Persatukan pasangan ekspresi berikut. Disini a, b, c adalah konstanta tetapi x, y, z, u, v merupakan variabel sebenarnya.
- $R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$ dengan $R(a, b) \wedge R(b, z) \Rightarrow R(u, a)$
 - $G(x, y) \wedge G(f(x), f(y))$ dan $G(a, b) \wedge G(z, u)$
15. Yang mana dari ekspresi-ekspresi berikut yang dapat dipersatukan, dan yang mana yang tidak? a, b, c adalah konstanta dan x, y , dan z adalah variabel.
- $G(x, a, y, x)$ dan $G(b, y, c, y)$
 - $F(c, y, z, y)$ dan $F(a, b, x, x)$
 - $G(x, y) \wedge G(y, z)$ dan $G(y, x) \wedge G(z, z)$
16. Dapatkan $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)))$ dari premis : $\exists xP(x) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow (x=y))$
17. Dapatkan $\exists xP(x) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow (x=y))$ dari premis : $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow (x = y)))$
18. Diberikan $\exists xP(x)$ dan $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Apakah kesimpulan $\exists!xQ(x)$ valid? Jika tidak berikan suatu counterexample.
19. Sebuah pekerjaan tertentu diiklankan. Misalkan $P(x)$: “ x adalah seorang pelamar”. Gunakan pengukur jumlah universal dan eksistensial, dalam konjungsi dengan predikat persamaan, untuk menyatakan kenyataan bahwa paling banyak 2 pelamar. Dan nyatakan juga bahwa hanya ada dua pelamar.
20. Suatu semesta pembicaraan terdiri dari semua orang yang ada dalam suatu komite. Gunakan universal dan eksistensial pengukur jumlah untuk menyatakan bahwa :
- Hanya ada satu pelajar dalam komite tersebut
 - Ada paling sedikit satu pelajar dalam komite tersebut
 - Ada tepat satu pelajar dalam komite tersebut
21. Gunakan aturan pada tabel 3.4 dan logika proposisi untuk
- menunjukkan bahwa $\forall xP(x) \wedge \forall y(P(y) \vee Q(y)) \equiv \neg\exists x\neg P(x)$
 - membuktikan validitas dari $\neg\exists x(\exists y(P(y) \wedge Q(y)) \Rightarrow R(x)) \Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg P(y) \vee \neg Q(y) \vee R(x))$
22. Gunakan kalkulus predikat untuk memformulasikan bahwa $f(x)$ adalah suatu fungsi jika untuk tiap x , ada tepat satu y dimana $y = f(x)$.

23. Misalkan $P(x,y) : "x \text{ adalah orang tua } y"$. Gunakan predikat ini untuk menyatakan " x dan y saudara kandung". Catatan bahwa x bukan saudara kandung x sendiri.
24. Tentukan semesta dalam $f(f(x)) = x$ untuk semua x
25. Misal $x \circ y = xy$. Tentukan apakah $x \circ y$ komutatif atau asosiatif
26. Misalkan $x \circ y = x + y - xy$. Tunjukkan bahwa operasi \circ adalah komutatif dan asosiatif. Tentukan elemen identitas dan tunjukkan inverse dari tiap elemen.
27. Sebuah elemen x dikatakan idempoten jika $x \circ x = x$. Buktikan bahwa jika sebuah operator komutatif, maka elemen identitasnya idempoten.