

Bab II

Kalkulus Proposisi

Bab pertama ini menyampaikan sejumlah argumen logika. Semua argumen logika meliputi proposisi-proposisi atomik (*atomic proposition*), yang tidak dapat dibagi lagi. Proposisi atomik yang kemudian dikombinasi dengan bermacam kata sambung menjadi proposisi gabungan (*compound proposition*). Kata sambung – kata sambung dibahas secara mendalam, dan penggunaannya dalam pembuatan proposisi gabungan kompleks juga dianalisa. Ada proposisi khusus yang disebut dengan tautologi, dimana mempunyai nilai kebenaran yang selalu benar. Tautologi menghasilkan implikasi logik (*logical implication*) dan ekivalensi logik (*logical equivalences*). Implikasi logik adalah dasar penalaran dan ekivalensi logik memberi arti untuk memanipulasi proposisi secara aljabar.

2.1. Proposisi Logik

Definisi 2.1. : Sebuah pernyataan yang bernilai benar atau salah disebut dengan **proposisi** (*proposition*)

Proposisi tidak mungkin mempunyai nilai benar dan salah sekaligus. Jika suatu proposisi benar, kita katakan mempunyai “nilai kebenaran” adalah **benar** (*true*); jika proposisinya salah, nilai kebenarannya adalah **salah** (*false*).

Contoh 2.1 :

Berikut ini adalah proposisi

- a. Bulan itu bulat.
- b. 4 adalah bilangan prima.
- c. $3 + 3 = 6$
- d. 2 bilangan genap dan 3 tidak.

Pernyataan-pernyataan berikut bukan proposisi :

- a. $x + y > 4$
- b. $x = 3$
- c. Kamu akan pergi ?
- d. Belilah roti itu!

Suatu proposisi dapat diwakili dengan suatu **variable proposisi** berupa huruf besar atau huruf kapital atau biasanya dengan P, Q, R, \dots . Variabel-variabel ini hanya dapat mempunyai dua kemungkinan nilai, benar (*True*) atau salah (*False*), yang dapat direpresentasikan dengan konstanta proposisi, T untuk benar (*true*) dan F untuk salah (*false*). Suatu penugasan (*assignment*) dapat diberikan dengan memilih satu dari kedua konstanta proposisi tersebut dengan menggunakan tanda sama dengan. Misalkan P merupakan variabel proposisi, kita dapat menuliskan $P=T$, yang artinya P bernilai benar, atau kemungkinan kedua $P=F$, yang berarti P bernilai salah.

Variabel proposisi dan konstanta proposisi merupakan proposisi atomik; yang tidak dapat dibagi lebih jauh lagi. Dengan mengkombinasikan beberapa proposisi atomik, didapatkan **proposisi gabungan** atau **proposisi majemuk** (*compound proposition*). Misalkan, " P atau Q " adalah proposisi gabungan dan demikian juga " P dan Q " serta "Bukan P ". Fungsi dari kata "atau", "dan", "bukan/tidak" adalah untuk mengkombinasikan proposisi, dan kata-kata itu disebut juga **kata sambung logik** (*logical connectives*) atau **operator logik** (*logical operator*)

Definisi 2.2. : Sebuah proposisi yang hanya terdiri dari sebuah variabel proposisi tunggal atau satu konstanta proposisi disebut dengan **proposisi atomik** (*atomic proposition*). Semua proposisi non atomik disebut dengan **proposisi gabungan** (*compound proposition*). Semua proposisi gabungan mengandung sedikitnya satu kata sambung logik.

Contoh 2.2:

Misalkan terdapat dua proposisi berikut :

p : "Ayah pergi ke kantor"

q : "Ibu di rumah"

maka kedua proposisi tersebut dapat digabungkan menjadi

- p dan q : "Ayah pergi ke kantor dan ibu di rumah"

- p atau q : "Ayah pergi ke kantor atau ibu di rumah"

- Bukan p : "Ayah tidak pergi ke kantor" atau "Tidak benar ayah pergi ke kantor"

Jika proposisi tersebut atomik, nilai kebenaran diberikan langsung dengan tanda sama dengan. Sekarang masalahnya bagaimana cara atau aturan untuk memberikan nilai kebenaran pada proposisi gabungan. Aturan-aturan ini diberikan oleh arti dari kata sambungnya. Contohnya, menurut bahasa Indonesia, jika P benar, dan Q salah, P atau Q bernilai benar. Mendapatkan nilai kebenaran dari pernyataan proposisi yang kompleks lebih sulit. Untuk itu diperlukan sebuah tool yaitu **tabel kebenaran** (*truth table*), yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3. : **Tabel kebenaran** (*truth table*) dari suatu proposisi memberikan nilai kebenaran dari proposisi tersebut dalam semua kemungkinan pemberian nilai.

Secara khusus, semua kata sambung logik didefinisikan dengan menampilkan tabel kebenaran.

Latihan Soal 2.1

1. Gunakan variabel proposisi P dan Q untuk mewakili pernyataan-pernyataan logik berikut :
 - a. Jika 10 bilangan prima, 10 tidak sama dengan 2 kali 5. 10 sama dengan 2 kali 5. Maka 10 bukan bilangan prima.
 - b. Jika hujan terus menerus, petani akan protes. Jika hujan tidak turun terus-menerus, petani akan protes. Konsekuensinya, petani protes.
2. Mana dari pernyataan berikut yang merupakan proposisi :
 - a. Apakah hal itu benar?
 - b. John adalah sebuah nama.
 - c. 8 merupakan bilangan prima
 - d. 8 bukan bilangan prima
3. Mana dari pernyataan berikut yang merupakan proposisi atomik dan yang merupakan proposisi gabungan :
 - a. Semua kucing mempunyai tujuh nyawa.
 - b. Fredi tinggi dan Jim juga.
 - c. Fredi dan Jim tinggi
 - d. Mobil yang terlibat kecelakaan itu berwarna hijau atau biru
4. Berikan konstanta logik T atau F untuk proposisi berikut :
 - a. 7 bilangan genap
 - b. Jakarta adalah sebuah kota
 - c. Indonesia adalah sebuah kota

2.2. Operator Logik

Operator logik digunakan untuk mengkombinasikan proposisi ke dalam bentuk proposisi baru. Proposisi baru ini disebut **proposisi gabungan** (*compound proposition*) karena terdiri dari beberapa komponen.

2.2.1. Negasi

Definisi 2.4. : Jika P adalah proposisi. Proposisi gabungan $\neg P$, dibaca “bukan P ”, adalah proposisi yang bernilai benar jika P salah dan bernilai salah jika sebaliknya. $\neg P$ disebut **negasi** (*negation*) dari P . Kata sambung \neg dapat juga dibaca sebagai “tidak” atau “tidak benar bahwa..”

Contoh 2.3 :

P : “2 bilangan ganjil”

$\neg P$: “Tidak benar bahwa 2 bilangan ganjil”

Dari contoh proposisi diatas dapat dilihat bahwa P mula-mula bernilai “salah”. Setelah dioperasikan *negasi*, nilai negasi P ($\neg P$) menjadi “benar”.

Semua kemungkinan nilai kebenaran suatu proposisi dengan operator negasi dapat dinyatakan dalam sebuah tabel yang disebut dengan **tabel kebenaran** (*truth table*) sebagai berikut :

P	$\neg P$
T	F
F	T

Tabel 2.1. Tabel kebenaran untuk negasi

2.2.2. Konjungsi

Seringkali kita ingin mengekspresikan kenyataan bahwa dua pernyataan yang keduanya bernilai benar. Dalam kasus ini, kita menggunakan konjungsi, yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5. : Misalkan P dan Q adalah dua proposisi. Maka $P \wedge Q$ bernilai benar jika dan hanya jika P dan Q keduanya benar. $P \wedge Q$ disebut dengan **konjungsi** (*conjunction*) dari P dan Q , dan operator \wedge dibaca “dan”.

Tabel kebenaran untuk konjungsi sebagai berikut :

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Tabel 2.2. Tabel kebenaran untuk konjungsi

Contoh 2.4 :

P : "Program itu berjalan baik"

Q : "Inputnya benar"

$P \wedge Q$: "Program itu berjalan baik dan inputnya benar"

Dalam struktur bahasa terkadang kita dapat menyingkat penulisan proposisi dalam kalimat yang menggunakan kata sambung dan. Misalkan "Ayah dan ibu pergi ke pasar", dimana secara logik kalimat itu merupakan gabungan dua kalimat yaitu "Ayah pergi ke pasar" dan "ibu pergi ke pasar". Demikian juga untuk kalimat "adik membaca dan menulis" yang merupakan gabungan dari dua kalimat yaitu "adik membaca" dan "adik menulis".

2.2.3. Disjungsi

Pada subbab 2.1 kita menggunakan pernyataan "program komputer itu punya kutu atau inputnya salah". Pernyataan yang mengandung kata "atau" biasa disebut dengan disjungsi. Secara formal disjungsi didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.6. : Misalkan P dan Q adalah dua proposisi. Maka $P \vee Q$ bernilai salah hanya jika P dan Q keduanya salah. Jika P atau Q atau keduanya bernilai benar, maka $P \vee Q$ benar. $P \vee Q$ disebut **disjungsi** (*disjunction*) dari P dan Q dan operator \vee dibaca "atau".

Berikut adalah tabel kebenaran dari definisi disjungsi. Dalam tabel tersebut, bahwa jika $P = T$ dan $Q = T$, $P \vee Q$ punya nilai kebenaran T seperti terlihat pada baris 4.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Tabel 2.3. Tabel kebenaran untuk disjungsi

Contoh 2.5 :

P : "Program itu berjalan baik"

Q : "Inputnya benar"

$P \vee Q$: "Program itu berjalan baik atau inputnya benar"

Dalam konteks bahasa Indonesia, kata "atau" mempunyai dua pengertian yang berbeda. Dalam kalimat "Kamu boleh makan sup atau salad", dianggap bahwa kamu boleh mengambil sup atau salad, tetapi tidak keduanya. Kata "atau" disini digunakan dalam arti yang sensitif. Disamping itu, pernyataan "program itu punya bug atau inputnya keliru" tidak menutup kemungkinan keduanya bug dan input salah. Jika melihat pada tabel kebenaran dari definisi disjungsi, disitu mengindikasikan bahwa $P \vee Q$ benar jika P atau Q atau keduanya benar. Maka dari itu, \vee lebih sebagai *inclusive or*, daripada *exclusive or*. Untuk mencegah kerancuan, sebaiknya mengartikan $P \vee Q$ sebagai " P atau Q atau keduanya".

Berbeda dengan konjungsi, bentuk kalimat dalam disjungsi harus ditulis secara lengkap, tanpa menghilangkan predikat dari salah satu pernyataan. Misalkan kalimat : "Ada kesalahan pada baris 15 atau 16", harus dituliskan "Ada kesalahan pada baris 15 atau ada kesalahan di baris 16".

2.2.4. Kondisional

Dalam argumen logik bentuk "Jika ... maka" sangat penting. Bentuk ini menyatakan kondisional.

Definisi 2.7: Misalkan P dan Q adalah dua proposisi. Maka $P \Rightarrow Q$ bernilai salah jika P benar dan Q salah, dan selain itu $P \Rightarrow Q$ bernilai benar. $P \Rightarrow Q$ disebut **kondisional** (*conditional*) dari P dan Q . Kondisional $P \Rightarrow Q$ dibaca "Jika P maka Q ". Pernyataan P disebut *antecedent* dan Q disebut *consequent*.

$P \Rightarrow Q$ disebut juga dengan **implikasi** (*implication*). Tabel kebenaran dari kondisional

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Tabel 2.4. Tabel kebenaran untuk kondisional

Contoh 2.6 :

Berikut ini dua proposisi :

P : "Ayah ke kantor"

Q : "Ibu ke pasar"

Maka jika dihubungkan dengan operator implikasi menjadi

$P \Rightarrow Q$: "Jika ayah ke kantor, maka ibu ke pasar" atau

"Ayah ke kantor hanya jika ibu ke pasar" atau

"Ibu ke pasar, jika ayah ke kantor"

Jika *antecedent* benar, maka nilai kebenaran dari suatu kondisional adalah sama dengan nilai kebenaran *consequent*. Sebagai contoh, jika benar bahwa permintaan meningkat, maka pernyataan "jika permintaan meningkat, maka perusahaan berkembang" bernilai benar jika dan hanya jika perusahaan berkembang. Jika *antecedent* salah, maka kondisional dikatakan benar. Misalkan jika permintaan tidak meningkat, maka pernyataan "jika permintaan meningkat, maka perusahaan berkembang" adalah benar. Hal ini terkadang menimbulkan konflik dengan penggunaan kata "jika" dalam bahasa. Sebagai contoh misalkan Jim tidak makan malam. Dalam kasus ini, pernyataan "jika Jim makan malam, maka $4+4=9$ " secara normal dianggap salah oleh pemakai bahasa Indonesia., meskipun pernyataan ini dianggap benar dalam logika. Dalam logika setiap kondisional yang *antecedent*nya salah dianggap suatu pernyataan yang benar.

Secara umum, logika berhubungan dengan konsistensi dari pernyataan, dan nilai kebenaran untuk kondisional yang diberikan pada tabel 2.4 konsisten dengan kondisional dari bahasa Indonesia. Untuk melihatnya, perhatikan pernyataan berikut

Jika sebuah botol berisi asam, maka akan tertempel sebuah label peringatan

Pernyataan tersebut jelas merupakan kondisional dan dapat dinyatakan dengan $P \Rightarrow Q$, dimana P mewakili "botol berisi asam" dan Q untuk "botol itu ditempel sebuah label peringatan". Kenyataannya jika botol tersebut tidak berisi asam, tetapi katakanlah racun misalnya, maka botol itu tetap harus diberi label peringatan. Ini adalah contoh dimana antecedent salah dan konsekuensinya benar. Contoh kedua

misalkan sebuah botol berisi jus apel dan tidak ditemplei label peringatan. Pernyataan tersebut tetap konsisten.

Pemahaman arti dari kondisional sangatlah penting, dan untuk mencapai pemahaman lebih jauh, sekarang kita lihat daftar dari semua kemungkinan yang membuat kondisional benar.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	T	T

Disini terlihat bahwa P benar hanya jika Q benar. Lebih sedikit kasus P benar daripada Q , yang membuatnya suatu kondisi yang lebih kuat (*stronger condition*). Maka dari itu Q lebih lemah dari P . Dengan kata lain jika Q salah maka demikian juga dengan P . Dalam hal ini, seseorang dapat mengatakan bahwa $P \Rightarrow Q$ diterjemahkan ke dalam " P hanya jika Q " seperti dalam "Botol itu berisi asam hanya jika ditemplei label peringatan". Jika tidak ada label peringatannya maka botol itu tidak berisi asam. Label peringatan merupakan syarat perlu (*necessary condition*) bagi botol yang berisi asam. Di lain pihak, kenyataan bahwa sebuah botol berisi asam adalah sebuah syarat cukup (*sufficient condition*) bagi ada tidaknya sebuah label peringatan. Dengan demikian ada beberapa cara lain untuk mengekspresikan kondisional $P \Rightarrow Q$ dalam kalimat bahasa Indonesia, yaitu :

1. Jika P maka Q
2. Apapun P , maka Q
3. P hanya jika Q
4. P menyebabkan Q

Dalam bahasa, kita dapat membalik urutan dari antecedent dan konsekuennya. Sebagai contoh, "jika P maka Q " dapat dibaca " Q jika P ", seperti dalam "Botol ditemplei sebuah label peringatan jika berisi asam". Bentuk ekspresi lainnya :

1. Q jika P
2. Q apapun P
3. Q disebabkan P
4. Q perlu untuk P

Contohnya pada pernyataan "Botol ditemplei sebuah label peringatan jika berisi asam" dapat juga dinyatakan sebagai "Sebuah label peringatan perlu untuk botol yang berisi asam".

2.2.5. Bikondisional

Bikondisional atau biasa disebut juga dengan **biimplikasi** didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.8: Misalkan P dan Q adalah dua proposisi. Maka $P \Leftrightarrow Q$ benar jika P dan Q mempunyai nilai kebenaran yang sama. Proposisi $P \Leftrightarrow Q$ disebut **bikondisional** (biconditional) atau ekivalensi, dan dibaca “ P jika dan hanya jika Q ”. Dalam penulisannya bisa disingkat dengan “iif” yang merupakan singkatan dari “if and only if”.

Tabel kebenaran untuk bikondisional sebagai berikut :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Tabel 2.5. Tabel kebenaran untuk bikondisional

Contoh 2.7 :

P : “ x bilangan genap”

Q : “ x habis dibagi 2”

$P \Leftrightarrow Q$: “ x genap jika dan hanya jika x habis dibagi 2”

Latihan Soal 2.2

1. Misalkan A : “Martin kaya”, dan B : “Martin bahagia”. Tuliskan pernyataan berikut dalam bentuk simbolik :
 - a. Martin tidak kaya
 - b. Martin kaya dan bahagia
 - c. Martin kaya atau Martin bahagia
 - d. Jika Martin kaya, maka dia bahagia
 - e. Martin bahagia hanya jika dia kaya

2. Tentukan semua proposisi atomik dari kalimat berikut dan lambangkan dengan variabel seperti P, Q atau R . Kemudian rubah dalam bentuk kalkulus proposisi
 - a. Jika Jim ada di gudang, maka Jack seharusnya juga ada di gudang
 - b. Mobil itu berwarna merah atau coklat

- c. Ini bukan berita bagus
 - d. Kamu punya waktu hanya jika kamu bergegas
 - e. Dia akan datang jika dia punya waktu
 - f. Jika dia disana, maka mestinya dia mendengarnya
3. Buatlah tabel kebenaran untuk $P \wedge P$, $P \vee P$, $P \wedge T$ dan $P \wedge F$

2.3. Proposisi Gabungan

Dengan menggunakan operator logika, seseorang dapat mengkombinasikan proposisi, apakah berupa proposisi atomik atau proposisi gabungan itu sendiri. Hal ini kemungkinan akan menghasilkan pernyataan yang membingungkan atau punya arti lebih dari satu. Untuk mengatasinya, pertama kali akan dibahas mengenai ekspresi dengan tanda kurung penuh (*fully parenthesized expressions*). Ekspresi hasilnya dapat dibagi dalam suatu cara tertentu ke dalam sub ekspresi atau secara teknis, diuraikan (*parse*) dengan cara khusus. Agar lebih mudah untuk membaca ekspresi logik, seringkali digunakan aturan presedensi (*precedence rules*).

2.3.1. Ekspresi Logik

Sebuah proposisi yang diekspresikan dengan suatu rangkaian karakter disebut ekspresi logik (*logical expression*) atau *formula*. Sebagai contoh, $P \wedge Q$ adalah ekspresi logik dan demikian juga Q . Ekspresi logik dapat berupa atomik atau gabungan. Sebuah ekspresi atomik terdiri dari sebuah variabel proposisi tunggal atau sebuah konstanta proposisi tunggal, dan menyatakan sebuah proposisi atomik. Ekspresi gabungan berisi sedikitya satu operator logik dan menyatakan proposisi gabungan.

Kecuali jika ada kondisi awal yang diberikan, ekspresi logika mungkin membingungkan. Sebagai contoh, misalkan P adalah "Maya menyelesaikan tugasnya", Q adalah "Maya senang" dan R untuk "Maya pergi nonton nanti malam". Perhatikan ekspresi $P \Rightarrow Q \wedge R$. Tanpa aturan lain, ekspresi ini dapat diinterpretasikan dalam dua cara. Dapat berarti $(P \Rightarrow Q) \wedge R$, yang diterjemahkan menjadi "Jika Maya menyelesaikan tugasnya maka dia senang tapi dia akan pergi nonton malam ini". Alternatif kedua, dapat berarti $P \Rightarrow (Q \wedge R)$, yang dibaca "Jika Maya menyelesaikan tugasnya, maka dia senang dan pergi nonton malam ini". Karena itu ekspresi $P \Rightarrow Q \wedge R$ mendua arti (*ambiguous*). Untuk mencegah ambiguitas, harus tersedia aturan pemenggalan sub kalimat. Alternatif lain dengan menggunakan tanda kurung.

Pada ekspresi seperti $P \wedge Q$, $P \vee Q$ dan yang lainnya, variabel P dan Q ada bersama-sama dan berarti harus dituliskan sebagai $(P \wedge Q)$ dan $(P \vee Q)$. Jika ini dilakukan,

maka tidak ada kesalahan pengertian yang timbul saat ekspresi-ekspresi ini nantinya akan digabungkan dalam ekspresi yang lebih besar, seperti $((P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q))$. Ekspresi seperti ini dikatakan bertanda kurung lengkap (*fully parenthesized*).

Seseorang dapat menggunakan pengenal (*identifier*) untuk mewakili suatu ekspresi. Misalkan ekspresi $(P \wedge Q)$ disebut A , dan ekspresi $(P \vee Q)$ dinamakan B . Catatan bahwa ekspresi A mengandung variabel proposisi P dan Q . Tetapi A bukan sebuah variabel proposisi karena nilai kebenaran A harus disimpulkan dari nilai kebenaran dari variabel proposisi P dan Q . Hal ini penting untuk mencegah kerancuan.

Definisi 2.9: Semua ekspresi yang mengandung pengenal (*identifier*) yang mewakili ekspresi disebut dengan skema (*schemas*)

Contoh 2.8 :

Jika $A = (P \wedge Q)$ dan $B = (P \vee Q)$, maka skema $(A \Rightarrow B)$ adalah untuk $((P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q))$

Skema yang sama dapat dinyatakan dengan cara yang berbeda. Untuk skema $A \Rightarrow B$, jika $A = (P \vee Q)$ dan $B = R$ maka $A \Rightarrow B$ menyatakan $((P \vee Q) \Rightarrow R)$

2.3.2. Analisa Proposisi Gabungan

Semua proposisi gabungan mempunyai subproposisi dan subproposisi ini mungkin dikenali sebagai konjungsi, disjungsi dan seterusnya. Perhatikan proposisi berikut :

Jika Taufik menang di Olimpiade, semua orang akan menyanjungnya dan dia akan menjadi kaya; tetapi jika dia tidak menang, semua usahanya akan sia-sia.

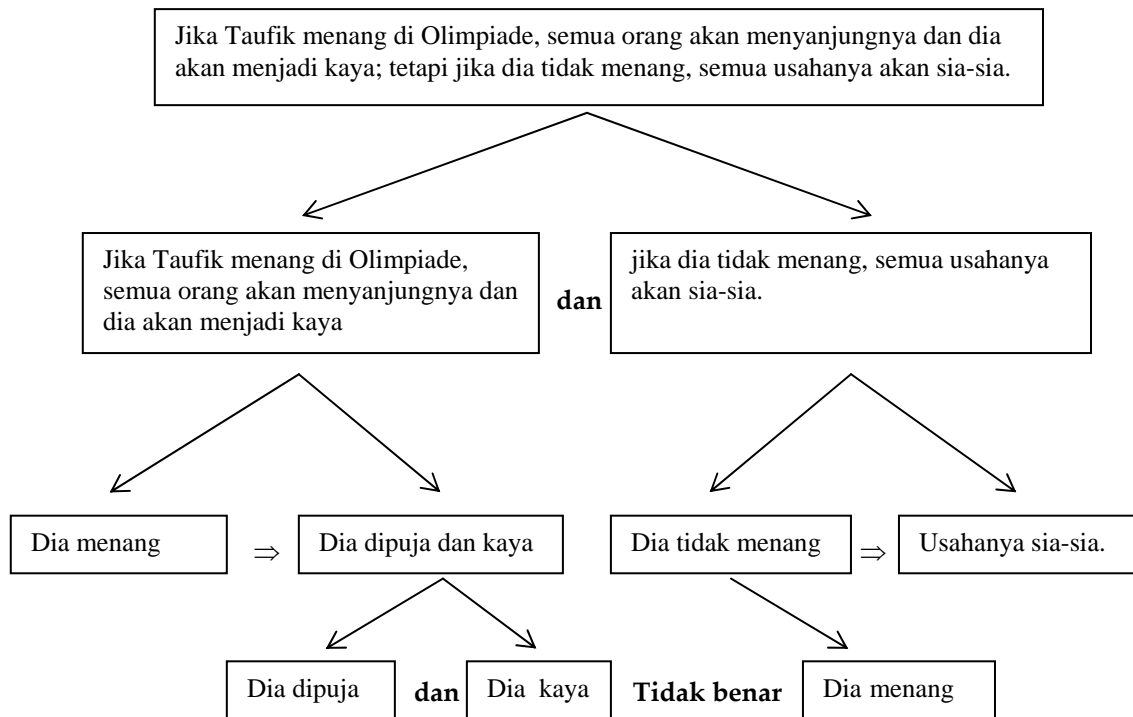
Proposisi tersebut adalah sebuah konjungsi dan ruang lingkup (*scope*) dari konjungsi ini diberikan oleh proposisi berikut:

Jika Taufik menang di Olimpiade, semua orang akan menyanjungnya dan dia akan menjadi kaya. Dan jika dia tidak menang, semua usahanya akan sia-sia

Kedua pernyataan diatas juga merupakan gabungan dan dapat dianalisa dengan cara yang sama. Misalkan scope kiri dapat dibagi dalam dua pernyataan yaitu “Taufik menang di Olimpiade” dan “Semua orang akan menyanjungnya dan dia menjadi kaya”. Pernyataan pertama dari kedua pernyataan tersebut adalah atomik dan tidak dapat dibagi lagi. Yang kedua merupakan gabungan dan dapat ditulis

sebagai konjungsi dari dua proposisi atomik : “semua orang menganjung Taufik” dan “Taufik menjadi kaya”. Analisa yang sama dapat dilakukan pada scope kanan dari proposisi utama.

Pembagian suatu pernyataan ke dalam komponen-komponennya disebut penguraian (parsing) dan hasilnya dapat digambarkan dalam sebuah pohon yang disebut pohon penguraian (parse tree), seperti terlihat pada gambar:



Gambar 2.1. Pohon penguraian untuk suatu proposisi

Sebuah ekspresi dengan pohon penguraian lebih mudah dirubah ke bentuk ekspresi dengan tanda kurung (fully parenthesized). Misalkan :

- P : Taufik menang di Olimpiade
- Q : Semua orang memujanya
- R : Dia menjadi kaya
- S : Usahanya sia-sia

Maka ekspresinya menjadi :

$$((P \Rightarrow (Q \wedge R)) \wedge ((\neg P) \Rightarrow S))$$

Perhatikan subekspresi $(P \Rightarrow (Q \wedge R))$. Ekspresi ini menunjukkan bahwa P tidak berhubungan dengan Q tetapi dengan $(Q \wedge R)$.

Jika E adalah ekspresi gabungan, maka ruang lingkup dari kata sambung utama dalam E disebut *subekspresi*. Contohnya, jika E dari bentuk $(A \wedge B)$, maka A dan B keduanya merupakan subekspresi. Subekspresi-subekspresi ini disebut subekspresi langsung (*immediate subexpression*). Jika A dan B merupakan ekspresi gabungan, maka masing-masing juga mempunyai subekspresi. Semua subekspresi dari A dan B juga merupakan subekspresi dari E . Pernyataan "Jika Taufik menang ..." mempunyai bentuk ekspresi $A \wedge B$ dengan $A = (P \Rightarrow (Q \wedge R))$ dan $B = ((\neg P) \Rightarrow S)$. Dalam hal ini A mempunyai subekspresi P dan $(Q \wedge R)$, sedangkan $(Q \wedge R)$ punya subekspresi Q dan R . Semua subekspresi ini merupakan subekspresi dari proposisi asal. Secara umum, subekspresi dari sebuah ekspresi E didefinisikan sebagai berikut :

1. E adalah subekspresi dari E
2. Jika E adalah dari bentuk $(\neg A)$, maka A merupakan subekspresi dari E .
3. Jika E dari bentuk $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, atau $(A \Leftrightarrow B)$ maka A dan B merupakan subekspresi dari E . Subekspresi-subekspresi ini disebut *immediate subexpression*.
4. Jika A adalah subekspresi dari E dan jika C adalah subekspresi dari A , maka C juga merupakan subekspresi dari E .
5. Tidak ada ekspresi lain yang merupakan subekspresi dari E

Catatan bahwa E merupakan subekspresi dari E sendiri. Subekspresi ini disebut suatu subekspresi *improper*. Sedangkan subekspresi selain ini disebut dengan subekspresi *proper* dari E . Ruang lingkup (*scope*) dari ekspresi E merupakan subekspresi langsung (*immediate expression*) dari E .

Satu lagi bentuk subekspresi khusus yang disebut dengan literal, yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.10: Suatu proposisi disebut literal jika berbentuk Q atau $\neg Q$, dimana Q adalah variabel proposisi. Kedua ekspresi, Q dan $\neg Q$ disebut *complementary literal*.

Jika P dan Q adalah variabel proposisi, maka P, Q dan $\neg Q$, semuanya literal, tetapi $\neg(P \vee Q)$ bukan literal. P dan $\neg P$ adalah dua *complementary literal*, tetapi P dan Q bukan.

2.3.3. Aturan Presedensi (*Precedence Rule*)

Cara lain untuk menghindari kesalahan arti dari sebuah ekspresi yang tidak menggunakan tanda kurung, digunakan aturan yang disebut dengan aturan presedensi (*precedence rule*). Aturan ini seperti aturan dalam ekspresi aritmatika, dimana disana diatur bahwa untuk ekspresi $2 + 3 * 2$, hasilnya bukan 10 tetapi 12, karena operasi perkalian (*) mempunyai tingkat presedensi lebih tinggi dari penjumlahan (+).

Dalam ekspresi proposisi, operator \neg mempunyai tingkat presedensi tertinggi. Contohnya, $\neg P \vee Q$ sama artinya dengan $(\neg P) \vee Q$ dan bukannya $\neg(P \vee Q)$. Untuk operator biner, tingkat presedensi tertinggi adalah \wedge kemudian berturut-turut diikuti \vee , \Rightarrow , dan \Leftrightarrow . Misalkan dalam ekspresi $P \vee Q \wedge R$, \wedge mempunyai tingkat presedensi lebih tinggi daripada \vee , maka ekspresi tersebut sama dengan $P \vee (Q \wedge R)$, demikian juga untuk $P \Rightarrow Q \vee R$, ekspresi ini sama dengan $P \Rightarrow (Q \vee R)$, karena tingkat presedensi \vee lebih tinggi dari \Rightarrow . Dengan menggunakan aturan presedensi ini, ekspresi "Jika Taufik menang ...", dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(P \Rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \Rightarrow S)$$

Definisi 2.11 : Sebuah operator biner disebut asosiatif kiri (*left associative*) jika operator di sebelah kiri presedensinya lebih tinggi dari yang sebelah kanan. Sebuah operator biner disebut asosiatif kanan (*right associative*) jika operator di sebelah kanan presedensinya lebih tinggi dari yang sebelah kiri.

Semua operator logik biner bersifat asosiatif kiri. Sehingga untuk ekspresi $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ diartikan sebagai $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ dan bukan $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

2.3.4. Evaluasi Ekspresi dan Tabel Kebenaran

Untuk mengetahui nilai kebenaran dari suatu ekspresi proposisi, kita harus melakukan evaluasi terhadap semua subekspresi yang dimiliki, yaitu dengan melakukan penguraian sehingga diperoleh proposisi atomik yang tidak dapat diurai lagi. Proposisi atomik inilah yang kemudian diberi suatu nilai kebenaran, yang lalu pada arah sebaliknya, akan memberi nilai untuk subekspresi-subekspresi yang melingkupinya. Sebagai contoh perhatikan pernyataan berikut :

Jika kamu kuliah di Informatika, dan jika kamu tidak mengerti logika, kamu tidak akan lulus.

Nilai kebenaran dari pernyataan itu bisa benar bisa juga salah, tergantung pada kebenaran dari masing-masing subekspresi, misalkan apakah benar kamu kuliah di Informatika? Apakah benar kamu tidak mengerti logika? Dan sebagainya. Sekarang jika kita definisikan :

- P : "kamu kuliah di Informatika"
- Q : "kamu mengerti logika"
- R : "kamu lulus"

Dengan menggunakan definisi ini, pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$$

Misalkan ekspresi tersebut diwakili dengan identifier A , yang berarti $A = (P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$. Sedangkan A berbentuk $B \Rightarrow C$, dengan $B = (P \wedge \neg Q)$ dan $C = \neg R$. B dapat dinyatakan sebagai $P \wedge D$, dimana $D = \neg Q$. Nilai kebenaran dari B, C dan D tergantung pada nilai kebenaran proposisi P, Q dan R . Dimana jika $P = T, Q = T$ dan $R = T$, maka $C = \neg R = F$ dan, $D = \neg Q = F$ yang menyebabkan $B = P \wedge D = T \wedge F = F$, sehingga $A = B \Rightarrow C = F \Rightarrow F = T$. Dengan cara yang sama kita dapat mencari nilai kebenaran yang lain untuk nilai kebenaran tiap variabel proposisi yang berbeda. Semua kemungkinan nilai yang mungkin dapat disusun dalam sebuah tabel kebenaran seperti pada tabel 2.7 berikut ini :

P	Q	R	D $\neg Q$	$B = P \wedge D$ $P \wedge \neg Q$	C $\neg R$	$A = B \Rightarrow C$ $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$
F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	T
T	T	T	F	F	F	T

Tabel 2.7. Tabel kebenaran untuk $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$

Suatu tabel kebenaran memberikan nilai kebenaran dari sebuah ekspresi untuk semua kemungkinan nilai kebenaran yang diberikan. Misalkan ekspresi A mengandung tiga variabel proposisi P, Q dan R dan masing-masing mempunyai dua kemungkinan nilai kebenaran yaitu T dan F , maka ada $2^3 = 8$ baris

kemungkinan nilai kebenaran. Secara umum, tabel kebenaran dengan n variabel proposisi mempunyai 2^n baris kemungkinan.

Latihan Soal 2.3

1. Misalkan P : "Hari ini dingin"
 Q : "Hari ini hujan"
 - a. Berikan sebuah kalimat yang menyatakan proposisi berikut :

(i). $\neg P$	(ii) $\neg P \wedge \neg Q$	(iii) $P \vee Q$	(iv) $Q \vee \neg P$
---------------	-----------------------------	------------------	----------------------
 - b. Nyatakan kalimat berikut dalam bentuk simbol proposisi ;
 - (i). "Tidak benar bahwa hari ini tidak hujan"
 - (ii) "Tidak benar bahwa hari ini hujan atau dingin"
 - (iii) "Jika hari ini tidak hujan maka tidak dingin"

2. Misalkan P : "Hari ini hari Senin"
 Q : "Aku sedang belajar"
 R : "Aku punya banyak waktu"
 - a. Berikan sebuah kalimat yang menyatakan proposisi berikut :
 - (i). $Q \Leftrightarrow (R \wedge \neg P)$
 - (ii). $R \wedge Q$
 - (iii). $(Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow Q)$
 - (iv) $\neg(R \vee Q)$
 - b. Nyatakan kalimat berikut dalam bentuk simbol proposisi ;
 - (i). "Jika hari ini bukan hari Senin dan aku punya banyak waktu, maka aku akan belajar"
 - (ii) "Aku akan belajar hanya jika aku punya banyak waktu"
 - (iii) "Hari ini hari senin dan aku tidak belajar"

3. Berikan tanda kurung penuh untuk ekspresi-ekspresi berikut dengan menggunakan aturan presedensi.
 - a. $P \wedge Q \wedge R \Rightarrow P$
 - b. $P \wedge R \vee Q \Leftrightarrow \neg R$
 - c. $\neg(P \wedge R) \Rightarrow \neg Q \vee S$
 - d. $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$

4. Cari proposisi atomik dari kalimat berikut dan ganti dengan simbol variabel proposisi, kemudian rubah kalimat tersebut dalam kalkulus proposisi
 - a. Jika kamu tidak pergi, saya akan memanggil polisi
 - b. Kedua anak itu punya paman yang sama jika dan hanya jika mereka mempunyai ibu yang sama dan ayah yang sama

- c. Hari ini hari yang indah jika matahari bersinar, dan hanya jika tidak panas.
 d. Jika $i > j$, maka $i - 1 > j$, kecuali $j=3$
5. Misalkan P dan Q bernilai benar (T) dan R dan S bernilai salah (F), tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut :
- $P \vee (Q \wedge R)$
 - $(P \wedge (Q \wedge R)) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (R \vee S))$
 - $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee (((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S)$
 - $(\neg(P \wedge Q) \vee \neg R) \vee ((Q \Leftrightarrow \neg P) \Rightarrow (R \vee \neg S))$
 - $(P \Leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \Rightarrow S)$
 - $(P \vee (Q \Rightarrow (R \wedge \neg P))) \Leftrightarrow (Q \vee \neg S)$
6. Buatlah tabel kebenaran untuk formula berikut ini :
- $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
 - $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
 - $P \wedge (P \vee Q)$
 - $P \wedge (Q \wedge P)$
 - $(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$
 - $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

2.4. Tautologi dan Kontradiksi

Definisi 2.13: Sebuah ekspresi logik disebut tautologi jika bernilai benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran.

Definisi 2.14: Sebuah ekspresi logik disebut kontradiksi jika bernilai salah untuk semua kemungkinan nilai kebenaran.

Definisi 2.14: Sebuah ekspresi logik yang bukan tautologi maupun kontradiksi disebut kontingensi

Dari tabel kebenaran yang diberikan kita dapat mengetahui apakah sebuah ekspresi berupa tautologi, kontradiksi atau kontingensi. Jika semua baris dalam tabel menghasilkan nilai benar bagi ekspresi itu, maka ekspresi tersebut dinamakan

tautologi. Sebaliknya jika semua barisnya bernilai salah, maka ekspresi itu merupakan kontradiksi. Selain itu disebut kontingensi.

2.4.1. Tautologi

Bentuk tautologi yang paling sederhana adalah $P \vee \neg P$, yang tabel kebenarannya adalah sebagai berikut :

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
F	T	T
T	F	T

Tabel 2.8. Tabel kebenaran untuk $P \vee \neg P$

Karena tautologi sangat penting, sebuah simbol khusus digunakan untuk memberi tanda sebuah ekspresi logik adalah tautologi. Jadi misalkan A adalah tautologi, ditulis sebagai : $\models A$. Sehingga untuk proposisi diatas dapat kita tulis sebagai berikut $\models P \vee \neg P$

Jika A adalah tautologi yang mengandung variabel P , salah satu cara untuk menentukan sebuah ekspresi baru dengan mengganti semua P dengan ekspresi pengganti. Maka ekspresi hasil A' akan berupa tautologi juga. Sebagai contoh pada ekspresi $P \vee \neg P$ yang merupakan tautologi. Jika P diganti dengan $(P \wedge Q)$ maka ekspresi tersebut menjadi $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$ dan pasti merupakan tautologi. Kita dapat melihat tabel kebenaran untuk ekspresi tersebut.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$
F	F	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	T

Tabel 2.9. Tabel kebenaran untuk $\models (P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge Q)$

Secara umum dapat dilihat pada teorema berikut :

Teorema 2.1. Diketahui A adalah sebuah ekspresi tautologi, dan P_1, P_2, \dots, P_n adalah variabel-variabel proposisi dari A . Misalkan B_1, B_2, \dots, B_n merupakan ekspresi logik pengganti. Ekspresi yang diperoleh dengan mengganti P_1 oleh B_1, P_2 oleh B_2, \dots, P_n oleh B_n adalah sebuah skema (scheme) dan setiap hal dari skema ini merupakan tautologi.

Contoh 2.8 : Jika diketahui $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ adalah sebuah tautologi, maka buktikan bahwa $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee R$ adalah sebuah tautologi.

Penyelesaian : Menurut teorema diatas ekspresi $\neg(P \wedge Q) \vee Q$ dapat dirubah menjadi skema $\neg(B \wedge C) \vee C$, dan jika $B = (P \vee Q)$ dan $C = R$, maka kita akan memperoleh skema baru $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee R$ yang juga merupakan proposisi.

2.4.2. Kontradiksi

Berikut ini adalah tabel kebenaran untuk kontradiksi adalah $P \wedge \neg P$:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
F	T	F
T	F	F

Tabel 2.8. Tabel kebenaran untuk $P \wedge \neg P$

Dari tabel tersebut kita dapat melihat nilai kebenaran dari semua baris dalam tabel (pada kolom terakhir) bernilai salah (*false*).

Kontradiksi erat kaitannya dengan tautologi. Kenyataannya jika A sebuah tautologi maka $\neg A$ adalah kontradiksi dan sebaliknya. Seperti dalam tautologi, kontradiksi juga bisa dirubah dalam bentuk skema. Sebagai contoh $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg(P \Rightarrow Q)$ adalah kontradiksi karena dapat dirubah kedalam skema $A \wedge \neg A$ yang dapat diturunkan dari $P \wedge \neg P$.

2.4.3. Tipe Penting dari Tautologi

Ada dua tipe penting dari tautologi yaitu implikasi logik (*logical implications*) dan ekivalensi logik (*logical equivalence*).

Definisi 2.16 : Jika A dan B adalah dua ekspresi logik dan jika $A \Rightarrow B$ tautologi maka dikatakan bahwa A secara logik mempengaruhi B dan kita tulis $A \Rightarrow B$

Definisi 2.16 : Jika A dan B adalah dua ekspresi logik dan jika A dan B mempunyai nilai kebenaran yang sama, maka A dan B dikatakan ekivalen secara logik, dan ditulis $A \equiv B$. Dengan kata lain, $A \equiv B$ jika dan hanya jika $A \Leftrightarrow B$ adalah tautologi.

Kita harus membedakan antara pasangan simbol \Rightarrow dan \Leftrightarrow dengan pasangan \Rightarrow dan \equiv . Untuk membedakan $A \equiv B$ dan $A \Leftrightarrow B$, secara bahasa, biasanya digunakan istilah ekivalensi materi (*material equivalence*) untuk $A \Leftrightarrow B$ dan ekvalensi logik (*logical equivalence*) untuk $A \equiv B$. Dengan cara yang sama dikatakan A mempengaruhi B secara materi (*material implies*) untuk $A \Rightarrow B$ dan A mempengaruhi B secara logik (*logical implies*) untuk $A \Rightarrow B$.

Ada hubungan penting antara tautologi, ekivalensi logik dan implikasi logik. A merupakan tautologi jika $A \equiv T$, dan A adalah kontradiksi jika $A \equiv F$. Dari $A \equiv B$ kita dapat menyimpulkan bahwa $A \Rightarrow B$ dan $B \Rightarrow A$. Dengan demikian, tiap ekivalensi logik dapat digunakan untuk menurunkan dua implikasi logik. Dan sebaliknya, jika $A \Rightarrow B$ dan $B \Rightarrow A$ maka kita dapat menyimpulkan bahwa $A \equiv B$.

Latihan Soal 2.4

- Buatlah tabel kebenaran untuk tiap ekspresi berikut. Tunjukkan ekspresi mana yang tautologi, kontradiksi atau kontingensi.
 - $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
 - $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
 - $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
 - $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
 - $(Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow P$
 - $\neg(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$
- Gunakan tautologi $P \vee \neg P$ untuk membuktikan bahwa ekspresi berikut adalah tautologi.
 - $(P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow Q)$
 - $\neg P \vee \neg \neg P$
 - $((P \wedge S) \vee Q) \vee \neg((P \wedge S) \vee Q)$
- Tunjukkan bahwa $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ adalah tautologi. Rubah tautologi ini dalam sebuah skema dengan A menggantikan P dan B mengganti Q . Gunakan skema ini untuk membuktikan bahwa

$$(\neg P \Rightarrow \neg Q) \wedge (\neg \neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg Q$$

2.5. Ekuivalensi Logik

Perhatikan dua pernyataan berikut :

Adik belajar membaca dan menulis
Adik belajar menulis dan membaca

Jelas bahwa dua pernyataan tersebut punya nilai yang sama dan dapat dikatakan ekuivalen secara logik. Jika P mewakili “adik belajar membaca” dan Q untuk “adik belajar menulis” maka pernyataan pertama dapat ditulis sebagai $P \wedge Q$ sedangkan pernyataan kedua ditulis $Q \wedge P$. Maka $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ merupakan tautologi. Ini membuktikan bahwa dua pernyataan tersebut ekuivalen secara logik. Pernyataan-pernyataan yang ekuivalen secara logik dapat dipertukarkan tanpa mempengaruhi nilai kebenarannya.

2.5.1. Pembuktian Ekuivalensi Logik dengan Tabel Kebenaran

Jika E_1 dan E_2 masing-masing merupakan ekspresi logik, E_1 dikatakan ekuivalen secara logik dengan E_2 , dituliskan $E_1 \equiv E_2$, jika dapat dibuktikan bahwa $E_1 \Leftrightarrow E_2$ adalah tautologi. Sebagai contoh, perhatikan dua pernyataan berikut :

Adik tidak belajar membaca atau adik tidak belajar menulis
Tidak benar bahwa adik belajar membaca dan menulis

Misalkan P mewakili “adik belajar membaca” dan Q untuk “adik belajar menulis”. Pernyataan pertama dapat diganti dengan $\neg P \vee \neg Q$ dan pernyataan kedua ditulis sebagai $\neg(P \wedge Q)$. Untuk membuktikan bahwa kedua pernyataan tersebut ekuivalen secara logik maka kita harus membuktikan bahwa $(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$ adalah tautologi, seperti yang terlihat pada tabel dibawah ini. Pada tabel tersebut dapat dilihat bahwa nilai kebenaran dari $\neg P \vee \neg Q$ dan $\neg(P \wedge Q)$ sama (lihat kolom 5 dan kolom 7). Dan dapat dinyatakan sebagai $\neg P \vee \neg Q \equiv \neg(P \wedge Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$
F	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T

2.5.2. Aljabar Proposisi

Dalam aljabar matematik, kita dapat memanipulasi beberapa ekspresi matematika yang mengandung suatu variabel dan konstanta yang mewakili sebuah bilangan. Contohnya

$$X + Y - Y = Z$$

Ekspresi diatas ekivalen dapat disederhanakan menjadi ekspresi berikut :

$$X + 0 = Z \Leftrightarrow X = Z$$

Disini kita bisa melihat ekspresi matematika tersebut mempunyai variabel X, Y dan Z , dan juga operator $+$, $-$, $=$, serta dalam manipulasinya diperoleh sebuah konstanta 0 . Manipulasi seperti itu disebut juga dengan penyederhanaan.

Dalam aljabar proposisi, ekspresi logik yang mengandung variabel logik, konstanta logik dan tentu saja beberapa operator logik, dapat dimanipulasi dengan menggunakan beberapa aturan atau hukum aljabar proposisi. Berikut ini adalah tabel hukum aljabar proposisi :

Hukum	Nama
$P \vee P \equiv P$ $P \wedge P \equiv P$	Hukum <i>Idempoten</i>
$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	Hukum <i>Komutatif</i>
$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	Hukum <i>Asosiatif</i>
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Hukum <i>Distributif</i>
$P \vee F \equiv P$ $P \wedge T \equiv P$	Hukum <i>Identitas</i>
$P \vee T \equiv T$ $P \wedge F \equiv F$	Hukum <i>Dominasi</i>
$P \vee \neg P \equiv T$ $P \wedge \neg P \equiv F$	Hukum <i>Excluded Middle</i> Hukum <i>kontradiksi</i>
$\neg(\neg P)$	Hukum <i>Involusi / Double negation</i>
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	Hukum <i>DeMorgan</i>

Tabel 2.9. Tabel hukum aljabar proposisi untuk konjungsi, disjungsi dan negasi

Perhatikan hukum-hukum diatas, dimana setiap hukum kecuali involusi terdiri dari pasangan-pasangan yang disebut dengan **pasangan dual** (*dual pairs*). Dimana untuk tiap ekspresi, dual diperoleh dengan mengganti T dengan F , dan sebaliknya F diganti T dan mengganti semua operator \wedge diganti \vee juga semua \vee dengan \wedge . Sebagai contoh dalam hukum identitas untuk $P \vee F \equiv P$, jika \vee diganti \wedge dan F diganti T , maka akan diperoleh dualnya yaitu $P \wedge T \equiv P$.

Beberapa hukum penting dapat diturunkan dari hukum-hukum diatas. Salah satunya adalah hukum **absorpsi** (*absorption*) berikut ini :

$$P \vee (P \wedge Q) \equiv P \quad (2.1)$$

$$P \wedge (P \vee Q) \equiv P \quad (2.2)$$

Ekivalensi (2.1) dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} P \vee (P \wedge Q) &\equiv (P \wedge T) \vee (P \wedge Q) &<\text{hukum identitas}> \\ &\equiv P \wedge (T \vee Q) &<\text{hukum distributif}> \\ &\equiv P \wedge T &<\text{hukum dominasi}> \\ &\equiv P &<\text{hukum identitas}> \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita bisa membuktikan ekivalensi (2.2), atau bisa kita dapatkan dengan mencari dual dari ekspresi (2.1). Hukum penting lainnya adalah :

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \equiv Q \quad (2.3)$$

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \equiv Q \quad (2.4)$$

Bukti untuk ekivalensi (2.3) adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) &\equiv (P \vee \neg P) \wedge Q &<\text{hukum distributif}> \\ &\equiv T \wedge Q &<\text{hukum excluded middle}> \\ &\equiv Q &<\text{hukum identitas}> \end{aligned}$$

Terkadang hukum-hukum diatas kurang praktis untuk diimplementasikan. Berikut ini ada beberapa aturan penyederhanaan konjungsi yang terdiri dari literal saja, yaitu:

1. Jika sebuah konjungsi mengandung literal komplementer atau jika mengandung konstanta logik F , maka konjungsi ini akan mencapai F (ekivalen dengan nilai F); Dan konjungsi ini merupakan kontradiksi.

Contoh 2.9 :

- a. $P \wedge F \wedge Q \equiv F$

$$\begin{aligned} \text{Bukti : } P \wedge F \wedge Q &\equiv (P \wedge F) \wedge Q \\ &\equiv F \wedge Q <\text{hukum dominasi}> \\ &\equiv F <\text{hukum dominasi}> \end{aligned}$$

$$\text{b. } P \wedge Q \wedge \neg P \equiv F$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti : } P \wedge Q \wedge \neg P &\equiv P \wedge \neg P \wedge Q <\text{hukum komutatif}> \\ &\equiv F \wedge Q <\text{hukum kontradiksi}> \\ &\equiv F <\text{hukum dominasi}> \end{aligned}$$

2. Semua konstanta logik T dan semua variabel proposisi yang sama dapat dihilangkan.

Contoh 2.10 :

$$\text{a. } ((P_1 \wedge P_2) \wedge P_3) \wedge (T \wedge P_1) \equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$$

Bukti :

$$\begin{aligned} ((P_1 \wedge P_2) \wedge P_3) \wedge (T \wedge P_1) &\equiv ((P_1 \wedge P_2) \wedge P_3) \wedge P_1 <\text{hukum identitas}> \\ &\equiv P_1 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 <\text{hukum komutatif}> \\ &\equiv P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 <\text{hukum idempoten}> \end{aligned}$$

Untuk disjungsi berlaku dual dari aturan diatas.

1. Jika sebuah disjungsi mengandung literal komplementer atau jika mengandung konstanta logik T , maka disjungsi ini akan mencapai T (ekivalen dengan nilai T); Dan disjungsi ini merupakan tautologi.

Contoh 2.11 :

$$\text{a. } P \vee T \vee Q \equiv T$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti : } P \vee T \vee Q &\equiv (P \vee T) \vee Q \\ &\equiv T \vee Q <\text{hukum dominasi}> \\ &\equiv T <\text{hukum dominasi}> \end{aligned}$$

$$\text{b. } P \vee Q \vee \neg P \equiv T$$

$$\begin{aligned} \text{Bukti : } P \vee Q \vee \neg P &\equiv P \vee \neg P \vee Q <\text{hukum komutatif}> \\ &\equiv T \vee Q <\text{hukum kontradiksi}> \\ &\equiv T <\text{hukum dominasi}> \end{aligned}$$

2. Semua konstanta logik F dan semua variabel proposisi yang sama dapat dihilangkan.

Contoh 2.12:

$$\text{a. } ((P_1 \vee P_2) \vee P_3) \vee (F \vee P_1) \equiv P_1 \vee P_2 \vee P_3$$

Bukti :

$$\begin{aligned} ((P_1 \vee P_2) \vee P_3) \vee (F \vee P_1) &\equiv ((P_1 \vee P_2) \vee P_3) \vee P_1 <\text{hukum identitas}> \\ &\equiv P_1 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3 <\text{hukum komutatif}> \\ &\equiv P_1 \vee P_2 \vee P_3 <\text{hukum idempoten}> \end{aligned}$$

Perhatikan konjungsi $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$. Konjungsi ini dikatakan mempunyai empat *term*. Sedangkan $P \wedge Q$ punya dua *term*. Sebuah proposisi dengan variabel tunggal dapat dinyatakan sebagai konjungsi dengan satu *term*. Sedangkan konjungsi yang jika disederhanakan mencapai T , dikatakan sebagai konjungsi dengan nol *term*. Ada juga disjungsi dengan nol *term* yang selalu mencapai F .

Contoh 2.13 : Sederhanakan ekspresi berikut :

$$(P_3 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \vee (P_1 \wedge P_3 \wedge \neg P_1)$$

Penyelesaian : Dengan menggunakan aturan diatas, pertama-tama kita sederhanakan dulu dua konjungsi yang ada di dalam kurung, dimana konjungsi pertama mengandung dua variabel yang sama sehingga dapat dirubah menjadi

$$(P_3 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \equiv (P_3 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_1)$$

dan konjungsi kedua mempunyai literal komplementer :

$$(P_1 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \equiv F$$

Maka ekspresi diatas dapat dirubah menjadi :

$$\begin{aligned} (P_3 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) \vee (P_1 \wedge P_3 \wedge \neg P_1) &\equiv (P_3 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_1) \vee F \\ &\equiv (P_3 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_1) \end{aligned}$$

2.5.3. Menghilangkan Kondisional dan Bikondisional

Dalam hukum aljabar proposisi, tidak mengenal operator kondisional maupun bikondisional. Oleh karena itu, jika dalam sebuah ekspresi mengandung operator kondisional atau bikondisional, harus kita rubah ke dalam bentuk ekspresi lain yang operatornya berupa disjungsi, negasi atau konjungsi. Aturan atau hukum yang digunakan untuk menghilangkan kondisional dan bikondisional adalah sebagai berikut

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \quad (2.5)$$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (2.6)$$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad (2.7)$$

Dengan menggunakan (2.5), ekivalensi (2.7) dapat dirubah menjadi :

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \quad (2.8)$$

Contoh 2.14 : Hilangkan operator \Rightarrow dan \Leftrightarrow dari ekspresi berikut :

$$(P \Rightarrow Q \wedge R) \vee ((R \Leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S))$$

Penyelesaian : Dengan menggunakan ekivalensi (2.5) diperoleh :

$$(P \Rightarrow Q \wedge R) \vee ((R \Leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S)) \equiv (\neg P \vee Q \wedge R) \vee ((R \Leftrightarrow S) \wedge (Q \vee S))$$

Kemudian dengan ekivalensi (2.6) berubah menjadi :

$$(\neg P \vee Q \wedge R) \vee (((R \wedge S) \vee (\neg R \wedge \neg S)) \wedge (Q \vee S))$$

Atau kita juga bisa menggunakan ekivalensi (2.8), sehingga didapat :

$$(\neg P \vee Q \wedge R) \vee (((\neg R \vee S) \wedge (\neg S \wedge R)) \wedge (Q \vee S))$$

2.5.4. Bentuk Normal (*Normal Form*)

Bentuk standart dari sebuah ekspresi logik, yaitu **bentuk normal** (*normal form*), diperlukan untuk memudahkan pengenalan dan perbandingan dua ekspresi atau lebih. Ada dua tipe bentuk normal yaitu **bentuk normal disjungtif** (*disjunctive normal form*) dan **bentuk normal konjungtif** (*conjunctive normal form*). Keduanya memiliki **bentuk lengkap** (*full form*), yang disebut **disjungtif lengkap** (*full disjunctive*) dan **konjungtif lengkap** (*full conjunctive*).

Definisi 2.18 : Sebuah ekspresi logik dikatakan **berbentuk normal disjungtif** (*Disjunctive Normal Form*), disingkat DNF, jika dinyatakan sebagai suatu disjungsi, yang semua termnya adalah konjungsi dari literal. Dan sebaliknya, sebuah ekspresi logik dikatakan **berbentuk normal konjungtif** (*Conjunctive Normal Form*), disingkat CNF, jika dituliskan sebagai suatu konjungsi, yang semua termnya adalah disjungsi dari literal.

Contoh 2.15 :

Bentuk normal disjungtif :

- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
- $P \vee (Q \wedge R)$
- $\neg P \vee T$

Bentuk normal konjungtif

- $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $P \wedge (Q \vee R)$
- $\neg P \wedge T$

Tetapi disjungsi $\neg(P \wedge Q) \vee R$ bukan termasuk bentuk normal, karena mengandung subekspresi nonatomik yang dinegasikan. Hanya subekspresi atomik yang dapat

dinegasikan dan negasi dari subekspresi atomik merupakan literal. Sedang konjungsi $P \wedge (R \vee (P \wedge Q))$ juga bukan bentuk normal konjungtif, karena disjungsi $R \vee (P \wedge Q)$ mengandung sebuah konjungsi sebagai subekspresi. Literal seperti P dan $\neg P$ merupakan bentuk normal disjungtif dan bentuk normal konjungtif. Demikian juga dengan T dan F .

Ada tiga langkah yang harus dilakukan untuk mendapatkan bentuk normal konjungtif dengan memanipulasi secara aljabar terhadap sebuah ekspresi, yaitu :

1. Hilangkan semua \Rightarrow dan \Leftrightarrow dari ekspresi dengan menggunakan cara seperti di subbab 2.5.3.
2. Jika ekspresi mengandung subekspresi gabungan yang dinegasikan, hilangkan negasinya dengan menggunakan hukum involusi atau hukum De Morgan.
3. Kemudian dengan gunakan hukum distributif dan komutatif untuk mereduksi scope dari \vee seperti di bawah ini

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{2.9}$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{2.10}$$

Contoh 2.16: Tentukan bentuk normal konjungtif untuk ekspresi berikut :

$$\neg ((P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \neg ((P \vee \neg Q) \wedge \neg R) &\equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee \neg \neg R &<\text{De Morgan}> \\ &\equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee R &<\text{Involusi}> \\ &\equiv (\neg P \wedge \neg \neg Q) \vee R &<\text{De Morgan}> \\ &\equiv (\neg P \wedge Q) \vee R &<\text{Involusi}> \\ &\equiv (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee R) &<\text{Distributif}> \end{aligned}$$

Jika ada subekspresi yang berupa konjungsi kita dapat menerapkan aturan (2.9) atau (2.10). Yang akhirnya semua subekspresi menjadi disjungsi.

Contoh 2.17: Tentukan bentuk normal konjungtif untuk ekspresi berikut :

$$(P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))$$

Penyelesaian :

$$(P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5)) \equiv (P_1 \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))) \wedge (P_2 \vee (P_3 \wedge (P_4 \vee P_5))) \tag{2.11}$$

$$\equiv (P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_4 \vee P_5) \wedge (P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_4 \vee P_5) \tag{2.12}$$

Jika bentuk normal konjungtif telah didapatkan, kita perlu menyederhanakan ekspresi itu. Kita dapat menggunakan aturan-aturan di subbab 2.5.2. Secara umum, semua disjungsi yang mengandung literal komplementer dapat diganti dengan T . Dan juga kita dapat menghilangkan literal-literal yang muncul lebih dari satu.

Contoh 2.18 : Sederhanakan bentuk normal konjungtif untuk ekspresi berikut :

$$(P \vee Q) \wedge P \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$$

Penyelesaian : Disjungsi keempat $(P \vee \neg P \vee R)$ dapat disederhanakan menjadi T .

$$\begin{aligned} P \vee \neg P \vee R &\equiv T \vee R \\ &\equiv T \end{aligned}$$

Kemudian subekspresi $P \wedge (P \vee Q)$ dapat dirubah menjadi P dengan hukum absorpsi. Dan terakhir $(Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ disederhanakan menjadi R

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) &\equiv (Q \vee \neg Q) \wedge R \\ &\equiv T \wedge R \\ &\equiv R \end{aligned}$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \wedge P \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) &\equiv P \wedge R \wedge T \\ &\equiv P \wedge R \end{aligned}$$

2.5.5. Tabel kebenaran dan Bentuk Normal Disjuntif

Dalam bagian ini kita akan mempelajari bagaimana mendapatkan sebuah ekspresi proposisi dari suatu tabel kebenaran. Hasil proposisi yang diperoleh berupa bentuk normal disjuntif. Misalkan terdapat tabel kebenaran untuk proposisi f dengan variabel P , Q , dan R seperti terlihat pada tabel 2.17. Kita dapat menyusun fungsi kebenaran f dengan argumen P , Q dan R .

P	Q	R	f
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	F
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F
T	T	T	T

Tabel 2.17. Tabel kebenaran untuk fungsi f

Untuk merubah suatu fungsi dari tabel kebenaran yang diberikan ke dalam bentuk ekspresi logik, kita menggunakan *minterm*.

Definisi 2.19 : *Minterm* adalah sebuah konjungsi dari literal-literal, $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n$ dengan P_1, P_2, \dots, P_n adalah literal, yang tiap variabelnya muncul tepat satu kali.

Contoh 2.19 : $P \wedge \neg Q \wedge R$ adalah minterm untuk fungsi dengan variabel P, Q, R . Tetapi $P \wedge \neg Q$ bukan minterm fungsi tersebut karena variabel R tidak muncul. Demikian juga untuk $P \wedge P \wedge Q \wedge \neg R$ bukan minterm dari fungsi tersebut karena P muncul dua kali.

Setiap minterm bernilai benar untuk tepat satu assignment. Sebagai contoh, $P \wedge \neg Q \wedge R$ bernilai benar jika $P = T, Q = F$, dan $R = T$. Beberapa nilai kebenaran yang tidak sesuai akan membuat minterm ini bernilai salah. Disjungsi dari minterm-minterm ini benar hanya jika sedikitnya satu mintermnya bernilai benar. Misalkan $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$ bernilai benar jika $(P \wedge Q \wedge R) = T$ atau $(P \wedge \neg Q \wedge R) = T$ atau $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) = T$. Untuk fungsi f yang ditentukan oleh sebuah tabel kebenaran, kita harus memilih minterm-minterm yang akan membuat fungsi tersebut bernilai benar dan membentuk disjungsi dari minterm-minterm ini. Contoh dari tabel 2.17 diatas kita bisa memilih minterm dari :

P	Q	R	f
F	F	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

Misalkan dari baris 1 dimana $P=F, Q=F, R=T$ yang akan membentuk minterm $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$, untuk baris 2 didapatkan minterm $P \wedge \neg Q \wedge R$, dan untuk baris 3 diperoleh $P \wedge Q \wedge R$, sehingga fungsi f dapat dinyatakan sebagai disjungsi dari minterm-minterm tersebut, yaitu :

$$f \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

Fungsi f diatas merupakan disjungsi dari minterm yang berupa konjungsi, sehingga f dikatakan berbentuk normal disjuntif lengkap (*full disjunctive normal form*).

Definisi 2.20 : Jika suatu fungsi kebenaran (*truth function*) dinyatakan sebagai disjungsi dari minterm-minterm, maka fungsi tersebut dikatakan berbentuk normal disjuntif lengkap (*full disjunctive normal form*).

Bentuk normal disjuntif lengkap biasanya tidak dalam bentuk sederhana, sehingga kita perlu melakukan penyederhanaan dengan menggunakan aturan atau hukum-hukum seperti yang dijelaskan pada subbab sebelumnya. Contohnya fungsi f diatas dapat disederhanakan menjadi:

$$f \equiv (P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)$$

2.5.6. Bentuk Normal Konjungtif dan Komplementasi

Komplementasi digunakan untuk mendapatkan bentuk normal konjungtif dari suatu tabel kebenaran. Jika A sembarang ekspresi, maka komplemen dari A diperoleh dengan

1. membentuk dual dari A
2. kemudian mengganti semua literal dengan komplemennya.

Komplemen dari A juga merupakan negasi dari A , sehingga komplementasi merupakan salah satu cara untuk menegasikan sebuah ekspresi.

Contoh 2.20: Negasikan pernyataan

$$A = (P \wedge Q) \vee \neg R$$

dengan menggunakan komplementasi

Penyelesaian : Pertama kita harus mencari dual dari A yaitu

$$(P \vee Q) \wedge \neg R$$

Kemudian setiap literal dari ekspresi diatas diganti dengan komplemennya

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge R$$

Jadi :

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv \neg((P \wedge Q) \vee \neg R) \\ &\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge R \end{aligned}$$

Dari contoh diatas terlihat bahwa komplementasi secara logik ekivalen dengan negasi. Sehingga jika komplemen dari A dinyatakan sebagai $\text{comp } A$, maka $\text{comp } A \equiv \neg A$. Jika dua ekspresi A dan B secara logik ekivalen, maka demikian juga dengan negasinya dan komplemennya. Dengan kata lain jika $A \equiv B$ maka $\text{comp } A \equiv \text{comp } B$, dan konsekuensinya dual dari $A \equiv B$ merupakan ekivalensi logik.

Komplementasi dapat digunakan untuk mendapatkan bentuk normal konjungtif dari sebuah tabel kebenaran untuk suatu fungsi f . Caranya :

1. Tentukan bentuk normal disjungtif dari $\neg f$. Jika hasilnya berupa ekspresi A , maka $A \equiv \neg f$.
2. Tentukan komplemen dari A , dimana berarti $\text{comp } A \equiv \neg A \equiv f$.

Contoh 2.21 : Tentukan bentuk normal konjungtif lengkap untuk f_1 yang diberikan oleh tabel berikut:

P	Q	R	f_1
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

Tabel 2.18. Tabel kebenaran untuk fungsi f_1

Penyelesaian : $\neg f_1$ bernilai benar untuk

$$\begin{aligned}
 &P=F, Q=F, R=T \\
 &P=T, Q=F, R=F \\
 &P=T, Q=F, R=T
 \end{aligned}$$

Sehingga bentuk normal disjungtif dari $\neg f_1$ adalah :

$$\neg f_1 \equiv (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

Maka komplemen dari $\neg f_1$ yang juga merupakan bentuk normal konjungtif adalah :

$$f_1 \equiv (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

Latihan Soal 2.5

1. Hilangkan operator \Rightarrow dan \Leftrightarrow dari ekspresi berikut :
 - a. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$
 - b. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Leftrightarrow Q)$
 - c. $\neg P \Rightarrow \neg Q$

2. Buktikan ekivalensi berikut :
 - a. $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \equiv Q \wedge (P \vee R)$
 - b. $\neg(\neg(P \wedge Q) \vee P) \equiv F$
 - c. $\neg(\neg P \vee \neg(R \vee S)) \equiv (P \wedge R) \vee (P \wedge S)$
 - d. $(P \vee R) \wedge (Q \vee S) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge S) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

3. Sederhanakan ekspresi berikut :
 - a. $(P_3 \wedge T) \wedge (P_2 \wedge T)$
 - b. $(P_3 \wedge (P_2 \wedge (P_1 \wedge P_3)))$
 - c. $(P_3 \wedge T) \wedge (P_2 \wedge \neg P_3)$

4. Sederhanakan ekspresi berikut:
 - a. $(Q \wedge R \wedge S) \vee (Q \wedge \neg R \wedge S)$
 - b. $(P \vee R) \wedge (P \vee R \vee S)$
 - c. $(P \vee (Q \wedge S)) \vee (\neg Q \wedge S)$

5. Gunakan aljabar proposisi untuk menyederhanakan ekspresi berikut :
 - a. $P \vee \neg Q \vee (P \wedge Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge Q$
 - b. $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg(P \vee \neg R) \wedge Q)$
 - c. $\neg((P \vee Q) \wedge R) \vee Q$

6. Tentukan bentuk normal konjungtif dari pernyataan berikut dengan menggunakan aljabar proposisi
 - a. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R \vee Q)$
 - b. $(P \vee Q) \wedge (P \vee (R \wedge S)) \vee (P \wedge Q \wedge S)$

7. Tentukan bentuk normal disjungtif lengkap dari fungsi logik yang diberikan dalam tabel 2.19 :

8. Tentukan bentuk normal konjungtif lengkap untuk fungsi f di tabel 2.19.

P	Q	R	f
F	F	F	F
F	F	T	T
F	T	F	F
F	T	T	F
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	F
T	T	T	T

Tabel 2.19. Tabel kebenaran untuk fungsi f

2.6. Argumen Logik dan Implikasi Logik

2.6.1. Argumen Logik

Argumen adalah sebuah pernyataan yang terdiri dari beberapa proposisi yang disebut *premis* dan menghasilkan sebuah pernyataan yang disebut *konklusi*. Bentuk dari argumen adalah :

$$\begin{array}{l}
 P_1 \\
 P_2 \\
 \dots \\
 P_n \\
 \hline
 \therefore Q
 \end{array}$$

Berikut ini adalah contoh argumen yang baik dengan tiga pernyataan :

1. Jika permintaan meningkat, maka perusahaan akan berkembang
2. Jika perusahaan berkembang, maka mereka akan menggaji pegawai
-
3. Jika permintaan meningkat, maka perusahaan akan menggaji pegawai

Argumen logik diatas terdiri dari tiga baris, dan tiap baris terdiri dari sebuah pernyataan. Pernyataan dari baris 1 dan 2 merupakan *premis* argumen, dan baris 3 berisi konklusi (*conclusion*). Sepanjang premis-premis dapat diterima kebenarannya, konklusinya juga harus diterima, karena konklusi ini secara logika mengikuti premis-premis tersebut.

Contoh kedua dari argumen logik yang baik :

1. Program komputer tersebut mempunyai kutu (bug), atau inputnya salah
 2. Inputnya tidak salah
-
3. Program komputer ini mempunyai kutu (bug).

Sekali lagi, ada dua premis, yang diberikan pada baris 1 dan baris 2 dari argumen tersebut. Pada kasus tertentu, premis-premis ini bisa bernilai benar atau salah. Jika premis tersebut benar, maka kita tidak dapat mencegah konklusi bahwa program komputer tersebut mempunyai kutu.

Dengan menggunakan pernyataan seperti salah satu contoh diatas, Aristotle mengembangkan pola dari argumen yang *valid* dan yang tidak valid (*fallacy*). Pertama, dia menetapkan bahwa beberapa pernyataan yang digunakan dalam logik sebenarnya merupakan pernyataan atau kalimat gabungan; yang terdiri dari beberapa bagian, yang masing-masing merupakan sebuah pernyataan dengan kebenarannya sendiri. Contoh pertama berisi pernyataan berikut sebagai salah satu premisnya :

Jika permintaan meningkat, maka perusahaan akan berkembang.

Pernyataan ini terdiri dari dua bagian, yaitu “permintaan meningkat” dan “perusahaan berkembang”. Dua pernyataan tersebut dihubungkan dengan “jika maka”. Argumen kedua berisi pernyataan

Program komputer itu punya kutu atau inputnya salah

Sama halnya dengan sebelumnya, pernyataan ini terdiri dari dua bagian : “Program komputer ini punya kutu” dan “inputnya salah”. Kedua bagian statement dihubungkan dengan kata “atau”.

Untuk melihat argumen mana yang valid dan mana yang fallacy, Aristotle menyingkat pernyataan-pernyataan dari argumen itu dengan variabel-variabel pengganti. Kita akan menggunakan huruf besar untuk menyatakan pernyataan itu. Misalkan dengan huruf *P* untuk mengekspresikan pernyataan “permintaan meningkat”, huruf *Q* untuk “Perusahaan berkembang” dan huruf *R* mewakili “perusahaan menggaji karyawan”. Dengan menggunakan simbol-simbol tersebut, dan dengan operator pada subbab 2.1. kita dapat menyatakan argumen diatas sebagai berikut :

1. $P \Rightarrow Q$
 2. $Q \Rightarrow R$
-
3. $P \Rightarrow R$

Argumen yang seperti ini disebut dengan *hypothetical syllogism*. Dalam *hypothetical syllogism*, P, Q dan R masing-masing dapat diganti dengan pernyataan yang lain. Sebagai contoh, jika P mewakili “Kucing melihat ikan”, Q untuk “Kucing menangkap ikan” dan R untuk “Kucing makan ikan”, maka bentuk *hypothetical syllogism* :

1. Jika kucing melihat ikan, maka kucing itu akan menangkapnya.
2. Jika kucing menangkap ikan, maka kucing itu akan memakannya
-
3. Jika kucing melihat ikan, maka kucing itu akan memakannya.

Untuk argumen kedua, P mewakili “program komputer itu punya kutu” dan Q untuk “inputnya salah”. Argumen itu dapat dinyatakan sebagai berikut :

1. $P \vee Q$
2. $\neg Q$
-
3. P

Argumen ini disebut dengan *disjunctive syllogism* dan merupakan sebuah argumen dasar dalam logika.

Ada satu lagi argumen logik yang penting yaitu *modus ponens*. *Modus ponens* dinyatakan dalam bentuk :

1. $P \Rightarrow Q$
2. P
-
3. Q

Misalkan jika P adalah “Lampu menyala merah” dan Q adalah “mobil berhenti” maka premis-premis “jika lampu menyala merah maka mobil berhenti” dan “lampu menyala merah”, menghasilkan kesimpulan “mobil berhenti”.

2.6.2. Implikasi Logik

Implikasi logik merupakan tautologi dari bentuk $A \Rightarrow B$. Dan jika $A \Rightarrow B$ merupakan implikasi logik dituliskan sebagai $A \Rightarrow B$. Contohnya, ekspresi $P \Rightarrow T$ dan $F \Rightarrow P$. Kedua ekspresi ini selalu bernilai benar untuk setiap nilai P . Sehingga dinyatakan bahwa $P \Rightarrow T$ dan $F \Rightarrow P$. Implikasi logik merupakan tautologi, dan tautologi secara logika dapat digunakan sebagai dasar sebuah skema. Jika A sembarang ekspresi,

maka terdapat skema $A \Rightarrow T$ karena adanya implikasi logik $P \Rightarrow T$. Demikian juga akan ada skema $F \Rightarrow A$.

Teorema 2.2: Jika C dan D adalah dua buah ekspresi dan jika $C \equiv D$, maka $C \Rightarrow D$ dan $D \Rightarrow C$

Teorema tersebut menyatakan bahwa suatu ekivalensi logik menghasilkan implikasi logik. Contohnya, perhatikan ekivalensi

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \equiv Q$$

Ekivalensi ini menghasilkan implikasi logik sebagai berikut :

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \Rightarrow Q \quad (2.20)$$

Implikasi logik dapat dibuktikan dengan menggunakan tabel kebenaran. Jika kita akan membuktikan implikasi logik $A \Rightarrow B$, maka kita cari tabel kebenaran untuk $A \Rightarrow B$. Jika $A \Rightarrow B$ merupakan tautologi maka $A \Rightarrow B$. Sebagai contoh, pada tabel 2.20 dibuktikan implikasi logik $P \Rightarrow (P \vee Q)$ dengan menggunakan tabel kebenaran untuk $P \Rightarrow (P \vee Q)$.

P	Q	$(P \vee Q)$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
F	F	F	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

Tabel 2.20. Tabel kebenaran untuk $P \Rightarrow (P \vee Q)$

2.6.3. Bukti Argumen Valid Dengan Tabel Kebenaran

Suatu argumen dikatakan valid jika premis-premis yang dimiliki bersama-sama mengimplikasi konklusinya. Jika A_1, A_2, \dots, A_n merupakan premis-premis dan jika C adalah konklusi, maka sebuah argumen dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A_1, A_2, \dots, A_n \models C$$

Argumen tersebut dapat dibuktikan menggunakan tabel kebenaran dengan menunjukkan bahwa ekspresi berikut merupakan tautologi.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow C$$

Contoh Soal 2.9: Buktikan bahwa argumen Hypothetical Syllogism berikut valid dengan menggunakan tabel kebenaran :

$$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \circledast P \Rightarrow R$$

Penyelesaian : Pada tabel kebenaran ini ditambahkan beberapa tiga kolom baru. Yang pertama untuk nilai kebenaran dari konjungsi premisnya, yang kedua untuk nilai kebenaran konklusinya, dan yang terakhir untuk nilai kebenaran implikasi yang menunjukkan argumen tersebut valid atau tidak.

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>A</i> ($P \Rightarrow Q$)	<i>B</i> ($Q \Rightarrow R$)	Premis $A \wedge B$	Konklusi ($P \Rightarrow R$)	Valid
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>

Tabel 2.21. Tabel kebenaran dari Hypothetical Syllogism

Argumen berikut ini diambil dari sebuah cerita Sherlock Holmes, dimana dalam kisah ini, Sherlock Holmes menjelaskan analisisnya kepada Dr Watson terhadap motif suatu kasus pembunuhan secara logika. Intinya dia menganalisa bahwa :

Motif dari pembunuhan tersebut bukan perampokan karena tidak ada barang yang diambil

Dari kalimat ini kita dapat menyusunnya dalam sebuah argumen sebagai berikut :

1. *Jika ini kasus perampokan, maka ada barang yang diambil*
2. *Kenyataannya, tidak ada barang yang diambil*
-
3. *Ini bukan kasus perampokan*

Pernyataan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk logik, dengan menggunakan variabel *P* untuk "kasus perampokan", *Q* untuk "ada barang yang diambil"; sehingga argumen diatas menjadi :

1. $P \Rightarrow Q$
2. $\neg Q$
-
3. $\neg P$

Pada tabel 2.22 berikut ini akan ditunjukkan bahwa argumen tersebut valid. Bentuk argumen ini dikenal dengan nama *modus tollens*.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	Premis ($P \Rightarrow Q$) $\wedge \neg Q$	konklusi ($\neg P$)	Valid
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Tabel 2.22. Tabel kebenaran untuk *Modus Tollens*

Berikutnya adalah contoh argumen yang fallacy.

1. $P \vee Q$
-
2. P

Argumen diatas dibuktikan dengan tabel kebenaran berikut :

P	Q	Premis ($P \vee Q$)	Konklusi (P)	Valid ($P \vee Q$) $\Rightarrow P$
F	F	F	F	T
F	T	T	F	F
T	F	T	T	T
T	T	T	T	T

Tabel 2.23. Tabel kebenaran untuk argumen fallacy

2.6.4. Bukti Formal (Formal Proof)

Banyak argumen logik yang sebenarnya adalah **argumen gabungan** (*compound argument*) dimana konklusi dari satu argumen bisa menjadi premis untuk argumen berikutnya. Setiap bukti merupakan rangkaian dari beberapa argumen. Berikut ini akan diberikan contoh bukti formal dari suatu argumen logik, yang disebut juga dengan **derivasi** (*derivation*). Beberapa **aturan penarikan kesimpulan** (*rule of inference*) yang dapat diterima digunakan dalam proses derivasi. Sistem derivasi ini

selain **valid** juga harus **lengkap** (*complete*), dalam arti, harus memungkinkan untuk menurunkan setiap konklusi yang secara logik dihasilkan dari premis-premisnya.

Jika ada derivasi untuk konklusi C , dari premis A_1, A_2, \dots, A_n dengan menggunakan himpunan aturan penarikan kesimpulan yang dapat diterima, kita tuliskan

$$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash C$$

Jika sebuah sistem valid dan lengkap maka $A \vdash B$ jika dan hanya jika $A \models B$. Berikut ini adalah tabel beberapa aturan penarikan kesimpulan yang penting

No	Rule of Inference	Bentuk formal	Nama
1	$\frac{P}{P \vee Q}$	$P \vdash P \vee Q$	Addition
2	$\frac{P \wedge Q}{P}$	$P \wedge Q \vdash P$	Simplification
3	$\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$	$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	Modus Ponens
4	$\frac{\neg Q \quad P \rightarrow Q}{\neg P}$	$\neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg P$	Modus Tollens
5	$\frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q}$	$P \vee Q, \neg P \vdash Q$	Disjunctive Syllogism
6	$\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$	Hypothetical Syllogism
7	$\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \quad P \vee R}{Q \vee S}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), P \vee R \vdash Q \vee S$	Constructive Dilemma
8	$\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \quad \neg Q \vee \neg S}{\neg P \vee \neg R}$	$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), \neg Q \vee \neg S \vdash \neg P \vee \neg R$	Destructive Dilemma
9	$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	$P, Q \vdash P \wedge Q$	Combination
10	$\frac{P \rightarrow Q \quad \neg P \rightarrow Q}{Q}$	$P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow Q \vdash Q$	Cases

No	Rule of Inference	Bentuk formal	Nama
11	$\frac{P \Rightarrow Q \quad Q \Rightarrow P}{P \Leftrightarrow Q}$	$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P \circledast P \Leftrightarrow Q$	<i>Equivalence introduction</i>
12	$\frac{P \quad \neg P}{Q}$	$P, \neg P \circledast Q$	<i>Inconsistency</i>
13	$\frac{P \Leftrightarrow Q \quad P \Rightarrow Q}{P \Rightarrow Q}$	$P \Leftrightarrow Q \circledast P \Rightarrow Q$	<i>Equivalence Elimination</i>

Tabel 2.24. Aturan-aturan pengambilan kesimpulan (*rule of inference*) utama

Disini akan diberikan dua contoh pembuktian dari suatu argumen dengan menggunakan aturan-aturan tersebut. Contoh pertama akan membahas efek dari if-statement dalam bahasa C. Misalkan terdapat pernyataan :

$$\text{if } (x > \text{max}) \ x = \text{max}$$

Kita ingin membuktikan bahwa setelah dieksekusi tidak mungkin x lebih besar dari max . Untuk membuktikannya, ada dua masalah yang perlu diperhatikan, yaitu

1. jika $x > \text{max}$ benar sebelum eksekusi, maka pernyataan $x = \text{max}$ dieksekusi dan akan menyebabkan $x > \text{max}$ salah setelah eksekusi
2. jika sebaliknya $x > \text{max}$ salah sebelum eksekusi, maka pernyataan $x = \text{max}$ tidak akan dieksekusi (tidak melakukan apa-apa) dan akan menyebabkan $x > \text{max}$ tetap salah setelah eksekusi

Misalkan kita mempunyai beberapa variabel untuk menyatakan :

P : $x > \text{max}$ sebelum eksekusi

Q : $x = \text{max}$ setelah eksekusi

R : $x > \text{max}$ setelah eksekusi

Maka kita dapatkan :

1. $P \Rightarrow Q$
2. $Q \Rightarrow \neg R$
3. $\neg P \Rightarrow \neg R$
-
4. $\neg R$

Pembuktian dari argumen tersebut dapat dilihat berikut ini :

Buktikan : $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow \neg R, \neg P \Rightarrow \neg R \vdash \neg R$		
Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $P \Rightarrow Q$	Premis	Jika $x > \text{max}$ sebelum eksekusi maka $x = \text{max}$ dieksekusi
2. $Q \Rightarrow \neg R$	Premis	Jika $x = \text{max}$ setelah eksekusi maka $x > \text{max}$ salah
3. $\neg P \Rightarrow \neg R$	Premis	Jika $x \leq \text{max}$ sebelum eksekusi maka diakhir $x > \text{max}$ salah
4. $P \Rightarrow \neg R$	1,2,HS	Jika $x > \text{max}$ sebelum eksekusi maka $x > \text{max}$ salah setelah eksekusi
5. $\neg R$	3,4,Cs	Sehingga benar bahwa $x > \text{max}$ salah setelah eksekusi, tidak peduli apakah $x > \text{max}$ ataupun $x \leq \text{max}$ sebelum eksekusi

Gambar 2.2. Bukti dari if-statement

Contoh kedua kembali mengambil cerita Sherlock Holmes, yang dicuplik dari “A study in Scarlet”. Perhatikan cerita berikut :

Dan sekarang kita sampai ke pertanyaan besar yaitu alasan kenapa? Perampokan bukan merupakan modus operandi dari pembunuhan ini, karena tidak ada barang yang hilang. Apakah karena alasan politik, atautkah karena wanita? Pertanyaan ini yang menghantui. Saya berubah pikiran dari dugaan pertama ke dugaan kedua. Pembunuhan karena alasan politik biasanya dilakukan secara cermat dan berlangsung cepat. Sebaliknya, pembunuhan ini telah direncanakan dan tersangka meninggalkan jejak di seluruh ruangan, yang menunjukkan si pembunuh ada di sana sepanjang waktu.

Misalkan kita gunakan variabel-variabel berikut :

P_1 : Ini adalah perampokan

P_2 : Ada barang yang diambil

P_3 : Ini adalah politik

P_4 : Ini karena seorang wanita

P_5 : Pembunuhnya pergi dengan cepat

P_6 : Pembunuhnya meninggalkan jejak di seluruh ruangan

Dan dari pernyataan tersebut kita dapatkan :

- | | |
|--|--|
| 1. $P_1 \Rightarrow P_2$ | jika ini perampokan maka ada barang yang diambil |
| 2. $\neg P_2$ | ternyata tidak ada barang yang diambil |
| 3. $\neg P_1 \Rightarrow (P_3 \vee P_4)$ | Jika bukan perampokan, pasti karena politik atau seorang wanita |
| 4. $P_3 \Rightarrow P_5$ | jika masalah politik, maka pembunuhnya pergi dengan cepat |
| 5. $P_6 \Rightarrow \neg P_5$ | jika pembunuhnya meninggalkan jejak, maka dia tidak pergi dengan cepat |
| 6. P_6 | ternyata pembunuhnya meninggalkan jejak di seluruh ruangan |
| ----- | |
| 7. P_4 | berarti pembunuhan ini karena wanita |

Bukti dari argumen tersebut adalah

Derivasi Formal	Aturan
1. $P_1 \Rightarrow P_2$	Premis
2. $\neg P_2$	Premis
3. $\neg P_1$	1, 2, Modus Tollens
4. $\neg P_1 \Rightarrow (P_3 \vee P_4)$	Premis
5. $P_3 \vee P_4$	3, 4, Modus Ponens
6. $P_3 \Rightarrow P_5$	Premis
7. $P_6 \Rightarrow \neg P_5$	Premis
8. P_6	Premis
9. $\neg P_5$	7, 8, Modus Ponens
10. $\neg P_3$	6, 9, Modus Tolens
11. P_4	5, 10, Disjunctive Syllogism

2.6.5. Teorema Deduksi

Untuk membuktikan $A \Rightarrow B$ dalam matematika, kita dapat menggunakan argumen informal berikut :

1. Asumsikan A , dan tambahkan A ke premis.
2. Buktikan B , menggunakan A , jika perlu
3. Abaikan A , dalam arti apapun nilai kebenaran A tidak diperlukan, tambahkan $A \Rightarrow B$

Contoh 2.10: Sepasang suami istri mempunyai seorang anak laki-laki. Buktikan bahwa jika anak kedua mereka perempuan, maka pasangan itu akan mempunyai seorang anak laki-laki dan seorang anak perempuan

Penyelesaian : Dimisalkan P mewakili “anak pertama adalah laki-laki”, dan Q untuk “anak kedua adalah perempuan”. Kita akan membuktikan bahwa $Q \Rightarrow P \wedge Q$ untuk premis P yang diberikan. Menurut metode diatas, dapat dilakukan langkah sebagai berikut :

1. P benar : pasangan tersebut punya anak laki-laki
2. Asumsi Q ; diasumsikan anak kedua pasangan tersebut adalah perempuan
3. Dari P dan Q kita dapat mengambil kesimpulan $P \wedge Q$ dengan *combination*.
4. Maka kita dapat simpulkan bahwa $Q \Rightarrow P \wedge Q$. Sekarang kita dapat mengabaikan Q , yang berarti kesimpulan tersebut bernilai benar untuk Q benar atau Q salah. Maka $Q \Rightarrow P \wedge Q$ terbukti benar.

Argumen ini menetapkan bahwa suatu asumsi dapat dirubah menjadi suatu antecedent dari sebuah kondisional. Secara umum isi dari teorema deduksi adalah :

Teorema 2.3. Misalkan A dan B adalah ekspresi dan A_1, A_2, \dots, A_n merupakan premis. Jika B, A_1, A_2, \dots, A_n secara logik bersama-sama menyimpulkan C , maka A_1, A_2, \dots, A_n secara logik menyebabkan $B \Rightarrow C$.

Kita dapat menggunakan teorema ini bersama dengan aturan-aturan pengambilan kesimpulan (*rule of inference*) untuk menghasilkan sistem yang lengkap.

Contoh 2.11: Buktikan hypothetical syllogism dengan menggunakan teorema deduksi dan gunakan modus ponens untuk pengambilan kesimpulan

Penyelesaian : Kita akan membuktikan $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R \circledast P \Rightarrow R$

1. $P \Rightarrow Q$ adalah premis
2. $Q \Rightarrow R$ adalah premis
3. asumsi : P
4. Q diperoleh dari 1,3 dengan modus ponens
5. R didapat dari 2,4 dengan modus ponens
6. Dengan teorema deduksi disimpulkan $P \Rightarrow R$

Ekivalensi sangat penting dalam beberapa teori. Sekali suatu ekivalensi diturunkan, kita dapat menggunakannya untuk manipulasi aljabar dalam teori tersebut. Dalam matematika, kita dapat menggunakan teknik berikut untuk membuktikan bahwa ekspresi A dan B ekivalen

1. Asumsikan A
2. Buktikan B
3. Tuliskan $A \Rightarrow B$, dan abaikan A
4. Asumsikan B
5. Buktikan A
6. Tulis $B \Rightarrow A$ dan abaikan B
7. Simpulkan $A \Leftrightarrow B$

Sebagai contoh kita akan membuktikan hukum asosiatif $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$, yang dapat dilihat pada tabel berikut

Derivasi Formal	Aturan	Keterangan
1. $P \wedge (Q \wedge R)$	asumsi	Diasumsikan $A = P \wedge (Q \wedge R)$
2. P	1, simplification	
3. $Q \wedge R$	1, simplification	
4. Q	3, simplification	
5. R	3, simplification	
6. $P \wedge Q$	2,4, combination	
7. $(P \wedge Q) \wedge R$	5,6, combination	
8. $P \wedge (Q \wedge R) \Rightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	Teorema deduksi	Abaikan A , simpulkan $A \Rightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
9. $(P \wedge Q) \wedge R$	asumsi	Diasumsikan $A = (P \wedge Q) \wedge R$
10. R	9, simplification	
11. $P \wedge Q$	9, simplification	
12. P	11, simplification	
13. Q	11, simplification	
14. $Q \wedge R$	10,13, combination	
15. $P \wedge (Q \wedge R)$	12,14, combination	
16. $(P \wedge Q) \wedge R \Rightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	Teorema deduksi	simpulkan $A \Rightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
17. $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	8,16, equivalence	Kesimpulan akhir

Tipe pembuktian yang terakhir adalah pembuktian tidak langsung (*indirect proof*). Dalam pembuktian tak langsung, kita membuktikan $\neg A$ dengan menggunakan asumsi A dan akan menghasilkan suatu kontradiksi. Dimana A adalah sembarang ekspresi. Langkah-langkah pembuktian tak langsung adalah sebagai berikut :

1. Asumsikan A
2. Buktikan bahwa asumsi tersebut menghasilkan suatu kontradiksi
3. Abaikan A dan simpulkan $\neg A$

Contoh Soal 2.12: Buktikan $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow \neg Q \vdash \neg P$ dengan bukti tidak langsung

Penyelesaian:

Derivasi formal	Aturan	Keterangan
1. $P \Rightarrow Q$	Premis	
2. $P \Rightarrow \neg Q$	Premis	
3. P	Asumsi	Asumsi P untuk mendapatkan kontradiksi
4. Q	1,3, Modus Ponens	
5. $\neg Q$	2,3, Modus Ponens	
6. $Q \wedge \neg Q$	4,5, kontradiksi	Baris 4 dan 5 menghasilkan kontradiksi yang diinginkan
7. $\neg P$	Negasi	Karena asumsi P menghasilkan kontradiksi, kita dapat menyimpulkan negasi P ($\neg P$)

Latihan Soal 2.6

- Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan argumen berikut valid
 - $P \vee Q, \neg P \vee R \models Q \vee R$
 - $P \Rightarrow Q, P \Rightarrow R \models P \Rightarrow Q \wedge R$
 - $P, P \Rightarrow Q \models P \wedge Q$
 - $P \vee Q, P \Rightarrow R, Q \Rightarrow R \models R$
- Buktikan aturan berikut dengan metode tabel kebenaran
 - Modus ponens
 - Cases
 - Equivalence elimination
- Untuk masing-masing argumen berikut, tentukan aturan penarikan kesimpulan (*rule of inference*) apa yang digunakan
 - Jika ayah atau ibu menabung lebih dari 3 juta pertahun, kami sekeluarga dapat berlibur di Hawaii. Kenyataannya, ayah atau ibu memang menabung lebih dari 3 juta per tahun, sehingga kami dapat berlibur ke Hawaii.
 - Jika Budi menemukan bahwa produk yang kamu kirimkan rusak, dia akan kecewa. Ternyata dia menemukan bahwa produk itu rusak. Maka tentu saja Budi akan kecewa.
 - Jika John ada di pesta kemarin, maka sekarang dia masih tidur. John tidak tidur sekarang. Berarti dia tidak berada di pesta itu semalam.

- d. Jika saya melakukannya, saya akan dimarahi dan jika tidakpun, saya tetap dimarahi. Maka saya akan dimarahi.
 - e. Bapak akan membeli mobil atau motor. Bapak tidak membeli mobil. Berarti dia membeli motor.
4. Lakukan derivasi untuk argumen logik berikut. Tentukan aturan yang digunakan di tiap langkahnya.
 - a. $P, P \Rightarrow (Q \vee R), (Q \vee R) \Rightarrow S \vdash S$
 - b. $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R, \neg R \vdash \neg P$
 - c. $P, P \Rightarrow Q \vdash P \wedge Q$
 5. Diketahui premis : $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R$ dan $R \Rightarrow P$. Buktikan bahwa $P \Leftrightarrow Q$ dengan menggunakan *hypothetical syllogism* dan *equivalence introduction*.
 6. Gunakan teorema deduksi dan aturan *addition* untuk membuktikan bahwa $P \Rightarrow (P \vee \neg P)$ dan $\neg P \Rightarrow (P \vee \neg P)$. Apa kesimpulan akhirnya?
 7. Buktikan bahwa $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$. Gunakan teorema deduksi, aturan *simplification*, aturan *combination* dan aturan *equivalence introduction*.

SOAL-SOAL BAB I

1. Rubah kalimat berikut dalam proposisi logik. Variabel untuk proposisi diberikan. Jangan menggunakan variabel lain atau proposisi lain.
 - a. Jika dia ada di kantor, kita akan memberitahukan berita itu. Jika tidak, kita akan meninggalkan pesan untuknya. (P : "dia di kantor", Q : "kita akan memberitahukan berita itu", R : "kita akan meninggalkan pesan untuknya")
 - b. Jika operasi ini berhasil dan jika dia mengikuti petunjuk dokter, dia akan baik-baik saja. (P : "operasi ini berhasil", Q : "dia mengikuti petunjuk dokter", R : "dia akan baik-baik saja").
 - c. John menguasai C, Pascal atau Prolog, dan dia senang bekerja dengan orang lain. Selain itu, dia bukan programmer senior. (P_1 : "John menguasai C", P_2 : "John menguasai Pascal", P_3 : "John menguasai Prolog", Q : "John senang bekerja dengan orang lain", R : "John seorang programmer senior")

2. Tentukan tabel kebenaran untuk ekspresi berikut. Kemudian tentukan mana yang tautologi, kontradiksi dan kontingensi.
 - a. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$
 - b. $P \vee (\neg(Q \vee R) \wedge \neg P)$
 - c. $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

3. Sederhanakan ekspresi berikut dan tentukan hukum apa yang anda gunakan
 - a. $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$
 - b. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge (Q \vee \neg R))$
 - c. $(\neg P \wedge R \wedge \neg(P \wedge \neg(P \vee R)))$

4. Perhatikan skema berikut :

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$
 Buktikan kebenaran dari skema tersebut
 - a. dengan tabel kebenaran
 - b. dengan aljabar proposisi

5. Nyatakan aturan-aturan berikut sebagai tautologi. Hilangkan semua \Rightarrow dan buktikan dengan aljabar proposisi.
 - a. Simplification
 - b. Modus Tollens
 - c. Disjunctive Syllogism

6. Buktikan bahwa $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \equiv \neg((P \wedge Q) \wedge \neg R)$. Gunakan tabel kebenaran dan aljabar proposisi.

7. Tentukan tabel kebenaran dari $((P \vee Q) \Rightarrow R \wedge (R \Rightarrow P))$. Gunakan tabel kebenaran tersebut untuk mendapatkan bentuk normal disjungtif dan bentuk normal konjungtif.
8. Perhatikan argumen berikut :

Adalah X atau Y yang melakukan kejahatan itu. X keluar kota saat kejahatan itu terjadi. Jika X keluar kota, dia tidak berada di tempat kejadian perkara. Jika X tidak berada di tempat kejadian perkara, maka dia tidak melakukan kejahatan itu. Berarti Y yang melakukan kejahatan tersebut.

Nyatakan argumen tersebut dalam sebuah pembuktian formal dan turunkan konklusinya. Gunakan P_1 untuk "X melakukan kejahatan", P_2 untuk "Y melakukan kejahatan itu", Q untuk "X keluar kota", dan R untuk "X tidak berada di tempat kejadian perkara".

9. Gunakan hypothetical syllogism, cases, $P \vee Q \models (\neg P \Rightarrow Q)$, dan teorema deduksi untuk menurunkan R dari premis-premis : $P \vee Q$, $P \Rightarrow R$, dan $Q \Rightarrow R$.
10. Jika diberikan premis $P \wedge Q$, buktikan $P \vee Q$
11. Dengan teorema deduksi tunjukkan bahwa $Q \models (P \Rightarrow Q)$.
12. Tunjukkan bahwa $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ dan $P \wedge Q \Rightarrow R$ adalah ekuivalen.